Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 13: Aufgaben rund um den Spin und seine Hintergründe

- $\bullet$ *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst $\rightarrow$ **obligatorisch!**
- $\bullet\bullet$ *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis $\rightarrow$ **obligatorisch!**
- $\circ$ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung $\rightarrow$ **fakultativ!**
- $\circ\circ$ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten $\rightarrow$ **fakultativ!**

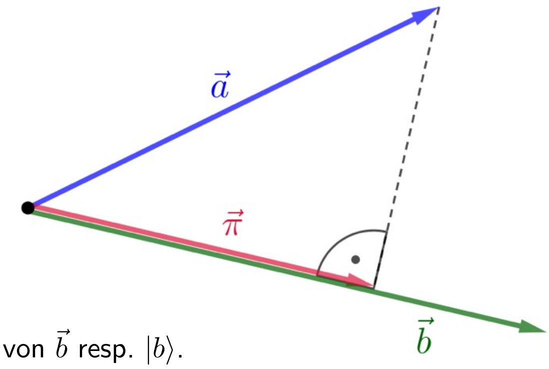
1. *Vektorräume mit inneren Produkten*

(a) Wir betrachten den Raum aller Vektoren im zweidimensionalen Raum (x-y-Ebene). Weshalb ist das Tripel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ,$$

sicher keine Basis dieses Vektorraums?

(b) In der Grafik rechts ist der Vektor $\vec{\pi}$ die **Projektion** des Vektors $\vec{a}$ auf den Vektor $\vec{b}$. Begründe mit dir vertrauter Vektorgeometrie, weshalb für diese Projektion gilt:



$$\vec{\pi} = \left(\vec{e}_b \cdot \vec{a}\right) \cdot \vec{e}_b$$

resp. neuerdings: $\quad |\pi\rangle = \langle e_b | a \rangle |e_b\rangle$

Dabei ist $\vec{e}_b$ resp. $|e_b\rangle$ der Einheitsvektor in Richtung von $\vec{b}$ resp. $|b\rangle$.

(c) Gegeben sei eine Basis $(|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_n\rangle)$, die *nicht* orthonormal ist. Das **Gram-Schmidt-Verfahren** ist ein systematisches Vorgehen, daraus eine Orthonormalbasis $(|e_1\rangle, |e_2\rangle, \ldots, |e_n\rangle)$ zu erzeugen. Es funktioniert folgendermaßen:

i. Normiere den ersten Basisvektor $|a_1\rangle$ (d.h. teile durch dessen Norm):

$$|e_1\rangle = \frac{|a_1\rangle}{||a_1||}$$

ii. Bestimme die Projektion des zweiten Vektors $|a_2\rangle$ auf den ersten normierten Vektor $|e_1\rangle$ und ziehe sie vom zweiten Vektor $|a_2\rangle$ ab:

$$|a_2\rangle - \langle e_1 | a_2 \rangle |e_1\rangle$$

Der sich ergebende Vektor ist orthogonal zu $|e_1\rangle$; durch Normierung erhalten wir $|e_2\rangle$.

iii. Bestimme die Projektionen von $|a_3\rangle$ auf $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$ und ziehe sie von $|a_3\rangle$ ab:

$$|a_3\rangle - \langle e_1 | a_3 \rangle |e_3\rangle - \langle e_2 | a_3 \rangle |e_2\rangle$$

Der sich ergebende Vektor ist orthogonal zu $|e_1\rangle$ und $|e_2\rangle$; durch Normierung erhalten Sie $|e_3\rangle$. Und so weiter.

Orthonormiere nun mithilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens die Basis

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Begründe mit der ersten Eigenschaft des inneren Produktes (Gleichung (19) in der Mini-Einführung zur Linearen Algebra), weshalb $\langle \alpha | \alpha \rangle$ eine reelle Zahl ist.

2. *Erste lineare Transformationen und Matrizen in zwei Dimensionen*

   (a) Fasse in Worte, welche grafischen Abbildungen durch die folgenden Matrizen beschrieben werden:

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tipp: Arbeite zur Veranschaulichung stets mit einem Ortsvektor $\vec{P} = \binom{x}{y}$, der vom Ursprung O zum Punkt P führt und auf den die Transformation angewendet wird.

   (b) Welche der Matrizen $\mathbf{A}$ bis $\mathbf{E}$ sind symmetrisch, welche antisymmetrisch?

   (c) Die Matrizen $\mathbf{A}$ bis $\mathbf{E}$ sind allesamt reell. Welche Konsequenz hat dies für die Frage, ob sie hermitesch oder anti-hermitesch sind?

   (d) Zu welchen der obigen Transformationen $\widehat{A}$ bis $\widehat{E}$ gibt es eine Transformation, die den Vorgang umkehrt? Wie lautet die zugehörige inverse Matrix?

   (e) Ein lineare Transformation soll zuerst einen Vektor um $90°$ im Uhrzeigersinn drehen, ihn dann mit Faktor 2 in x-Richtung strecken und ihn schliesslich an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten spiegeln. Wie lauten die Matrizen zu diesen Transformationen einzeln und zur Transformation insgesamt?

3. *Komplexe Matrizen*

   Gegeben seien die beiden Matrizen

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1+\mathrm{i} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 2 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

   (a) Berechne

   (a) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ (b) $\mathbf{AB}$ (c) $[\mathbf{A},\mathbf{B}]$ (d) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ (e) $\mathbf{A}^*$
   (f) $\mathbf{A}^\dagger$ (g) $\det \mathbf{A}$ (h) $\det \mathbf{B}$ (i) $\mathbf{A}^{-1}$ (j) $\mathbf{B}^{-1}$

   Achtung! Wie das Invertieren einer Matrix funktioniert, musst du dir selber überlegen. Entscheidend ist, dass $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{1}$ sein muss.

   (b) Verwende die beiden Spaltenmatrizen $\mathbf{a} = \binom{-\mathrm{i}}{1/2}$ und $\mathbf{b} = \binom{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}$ zur Berechnung von

   (a) $\mathbf{Aa}$ (b) $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b}$ (c) $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{Bb}$ (d) $\mathbf{BAa}$ (e) $\mathbf{ab}^\dagger$

   Überlege vorab jeweils genau, was für ein Objekt bei der Rechnung entsteht!

4. *Unitäre Matrizen und ein kleiner Beweis dazu*

   (a) Welche der folgenden Matrizen sind unitär?

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & \mathrm{i}/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1+\mathrm{i}}{2} & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\mathrm{i}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   (b) Zeige, dass die Zeilen und die Spalten einer unitären (2x2)-Matrix jeweils einen einen Satz orthonormaler Vektoren bildet.

   Achtung! Orthonormalität zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ bedeutet in komplexen Vektorräumen: $\mathbf{a}^\dagger\mathbf{b} = 0$.

5. *Drehmatrizen*

Wir möchten eine Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

so konstruieren, dass die dazu gehörende lineare Transformation $\widehat{T}$ die Drehung eines Vektors um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn bewirkt.

(a) In der Mini-Einführung zur Linearen Algebra haben wir erfahren, dass die erste Spalte der Matrix $\mathbf{M}$ das Bild der zum Basisvektor $|e_1\rangle$ gehörenden Spaltenmatrix $\mathbf{e_1} = \binom{1}{0}$ sein muss. Entsprechend muss die zweite Spalte von $\mathbf{M}$ das Bild von $\mathbf{e_2} = \binom{0}{1}$ sein.

Überlege dir, wie diese Matrixeinträge in der ersten und der zweiten Spalte folglich aussehen müssen, wenn eine Drehung um den Winkel α im Gegenuhrzeigersinn bewirkt werden soll.

(b) Wie gemäss dem Resultat aus Aufgabe (a) die explizite Matrix, mit der man einen Vektor um $\alpha = 60^\circ$ im Gegenuhrzeigersinn drehen kann ($\rightarrow$ exakte Werte!)?

(c) Wie steht es mit einer Drehung um 60° im Uhrzeigersinn?

(d) Welchen Wert hat die Determinante von $\mathbf{T}$ in Abhängigkeit des Winkels α? Befund?

(e) Stelle dir Drehungen von Vektoren in der x-y-Ebene mit verschiedenen Drehwinkeln vor. Wie steht es mit *Eigenvektoren* bei verschiedenen Drehwinkeln? Gibt es überhaupt Drehwinkel mit Eigenvektoren?

6. *Aufgaben zu Eigenwerten, Eigenvektoren und Diagonalisierbarkeit*

(a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lässt sich diese Matrix diagonalisieren?

(b) Nochmals zurück zu den *Drehmatrizen*: Zeige, dass die allgemeine Drehmatrix in der x-y-Ebene

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

(außer für ganz spezielle Winkelwerte – welche?) keine reellen Eigenwerte hat. (Darin zeigt sich der geometrische Befund, dass kein Vektor in der Ebene unter einer solchen Rotation auf sich selbst überführt wird; anders ist das bei Rotationen in *drei* Dimensionen.)

Diese Matrix hat aber komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren! Bestimme sie und konstruiere eine Matrix $\mathbf{S}$, die $\mathbf{T}$ diagonalisiert. Führe die Ähnlichkeitstransformation ($\mathbf{STS}^{-1}$) explizit durch und zeige, dass sie $\mathbf{T}$ auf die Diagonalform bringt.

7. *Eine weitere "Transformationsanalyse"*

Es sei

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1-\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Zeige, dass $\mathbf{T}$ hermitesch ist.

(b) Bestimme die Eigenwerte (beachte, dass sie reell sind).

(c) Bestimme und normiere die Eigenvektoren (beachte, dass sie orthogonal sind).

(d) Konstruiere die unitäre Diagonalisierungsmatrix $\mathbf{S}$ und zeige explizit, dass sie $\mathbf{T}$ diagonalisiert.

(e) Rechne nach, dass $\det \mathbf{T}$ für $\mathbf{T}$ und für die diagonalisierte Form gleich ist.

8. *Eigenschaften unitärer Transformationen*

   Eine *unitäre Transformation* $\widehat{U}$ ist eine Transformation, für die $\widehat{U}^{\dagger}\widehat{U} = 1$ gilt.

   (a) Zeige, dass das innere Produkt unter eine unitären Transformation erhalten bleibt, in dem Sinn, dass $\langle \widehat{U}\alpha | \widehat{U}\beta \rangle = \langle \alpha | \beta \rangle$ für alle Vektoren $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$ gilt.

   (b) Zeige, dass die Eigenwerte einer unitären Transformation den Betrag 1 haben.

   (c) Zeige, dass die Eigenvektoren einer unitären Transformation, die zu verschiedenen Eigenwerten gehören, orthogonal sind.

9. •• *Hilbert-Raum und hermitesche Operatoren*

(a) ∘ Der Funktionensatz $\{f_n\}$ lebe im Hilbert-Raum und sei einerseits orthonormiert, andererseits vollständig, sodass sich eine beliebige andere Funktion f des Hilbert-Raums in der Form

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x) \tag{1}$$

schreiben lässt.

Zeige nun, dass die Koeffizienten c_n durch

$$c_n = \langle f_n | f \rangle \tag{2}$$

gegeben sind.

Tipp: Setze (1) ins innere Produkt in (2) ein und zeige mittels der Orthonormalität der $\{f_n\}$, dass tatsächlich c_n herauskommt.

(b) ∘ Weise nach, dass der Impulsoperator $\widehat{p} = \left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}} \frac{\partial}{\partial x}\right)$ hermitesch ist, dass also gilt:

$$\langle f | \widehat{p} g \rangle = \langle \widehat{p} f | g \rangle \qquad \text{für alle quadratintegrablen } f(x,t) \text{ und } g(x,t) \tag{3}$$

Tipp: Arbeite mit einer partiellen Integration und verwende, dass quadratintegrable Funktionen die Eigenschaft haben müssen, für $\pm\infty$ zu verschwinden. Da es sich bei f und g um Wellenfunktionen handelt – worauf würden wir den Impulsoperator denn sonst anwenden wollen? – geht das zum inneren Produkt gehörende Integral von $-\infty$ bis $+\infty$.