Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 1: Relativitätsprinzip und Zeitdilatation

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ○ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ○○ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

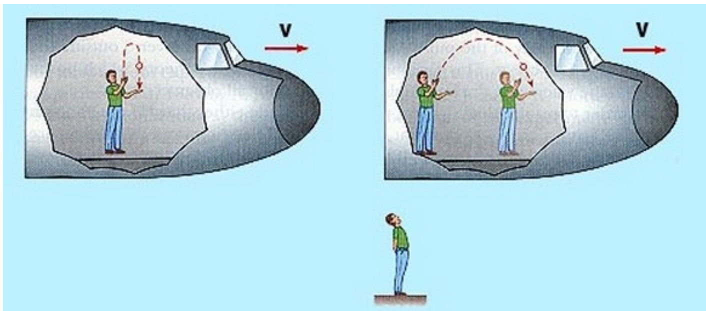
1. •• *Kurze rechnungsfreie Kontrollfragen*

   Schreibe zu diesen Fragen keine langen Antworten auf. Manchmal genügt eine Skizze oder auch nur ein "Ja" oder "Nein". Es geht einfach darum, dass du dir selber die Sache überlegt hast.

   (a) Inertialsysteme sind *nicht-beschleunigte Bezugssysteme*. Wie können wir uns anhand eines (theoretischen) Versuches davon überzeugen, dass ein Auto in einer Kurve kein Inertialsystem ist?

   (b) Was verstehen wir unter der *Standardorientierung* zweier Inertialsysteme?

   (c) Erläutere das *Relativitätsprinzip* anhand der Grafik rechts.

   (d) Wahr oder falsch? Der Ausdruck *in Ruhe sein* hat in der Physik keine absolute Bedeutung.

   (e) Wahr oder falsch? Da die Gesetze der Physik in allen Inertialsystemen dieselben sein sollen, . . .

      i. müssen Objekte in allen Inertialsystemen dieselbe kinetische Energie aufweisen.

      ii. muss die Energieerhaltung in allen Inertialsystemen gültig sein.

2. • *Kleine Rechenaufgaben zur klassischen Geschwindigkeitstransformation*

   (a) Ein Boot 1 (System S') fährt mit $3.4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ westwärts, Boot 2 (System S'') mit $5.0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ostwärts (Angaben relativ zum Wasser-System S). Alle drei Systeme haben ihre $x/x'/x''$-Achse nach Osten.

      i. Welche Geschwindigkeit weisen die Boote im Bezugssystem des jeweils anderen Bootes auf?

      ii. Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in den beiden Boot-Bezugssystemen?

      iii. Auf Boot 1 wird ein Ball mit $7.2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nach Osten von Bord geworfen. Welche Geschwindigkeit hat dieser Ball beim Abwurf aus der Sicht des Wassers resp. aus derjenigen von Boot 2?

   (b) Der Relativitätsexpress fährt mit $80\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit an dir vorüber. Innerhalb des Zugs rast ein Serviceangestellter mit $60\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit mit der Minibar durch den Gang.

   Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich gemäss der Galilei-Transformation der Serviceangestellte relativ zu dir, wenn er sich innerhalb des Zugs i. rückwärts, ii. vorwärts bewegt?

3. •• *Ereignisse in verschiedenen Bezugssystemen*

   Ein Zug sei $120\,\mathrm{m}$ lang. Der Ursprung des Zugsystems S' sitze am Zugende ($x' = 0$). Der Ursprung des Schienensystems S befinde sich bei einem Signal ($x = 0$), an dem das Zugende zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ vorbeifährt. Der Zug ist mit $126\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ unterwegs.

   (a) Zum Zeitpunkt $t' = 12\,\mathrm{s}$ betätige der Lokführer die Zugpfeife an der Zugspitze.
   Wie lauten die Koordinaten dieses Ereignisses im Zugsystem S' und im Schienensystem S?

   (b) Zum Zeitpunkt $t = 10\,\mathrm{s}$ betrete ein alter Herr einen unbewachten Bahnübergang bei $x = 750\,\mathrm{m}$.
   Wie lauten die Koordinaten dieses Ereignisses in S und in S'?

4. ∘∘ *Erste Schritte mit Taylor-Polynomen bei einer kubischen Funktion*

In dieser Aufgabe geht es darum erste Erfahrungen mit der Entwicklung einer Funktion in ein Taylor-Polynom zu sammeln. Wir repetieren kurz (vgl. Skript *Komplexe Zahlen*, Anhang A, S. 44):

Taylor-Polynom: Die Entwicklung einer beliebig oft differenzierbaren (= ableitbaren) Funktion $f(x)$ um eine bestimmte Stelle x_0 in ein *Taylor-Polynom* mit maximalem Grad n ist gegeben durch:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!} \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $f^{(k)}(x)$ die k-te Ableitung von $f(x)$ und $k!$ (sprich: k-Fakultät) steht für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis k, also $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$ (mit $0! \equiv 1$).

Für $n = 1$ ergibt sich die *Linearisierung*, für $n = 2$ die *Quadratisierung* und für $n = 3$ die *Kubisierung* von $f(x)$ an der Stelle x_0, wobei die Namen "Quadratisierung" und "Kubisierung" eher inoffiziellen Charakter besitzen.

Je grösser n ist, umso grösser ist die Umgebung der Stelle x_0, über die hinweg die ursprüngliche Funktion $f(x)$ durch das Taylor-Polynom $f_n(x)$ gut approximiert (= angenähert) wird.

In dieser Aufgabe betrachten wir die kubische Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

(a) Bestimme mittels Differentialrechnung die Extremal- und die Wendepunkte von $f(x)$.

(b) x_1 bezeichne die *Wendestelle* und x_2 die *lokale Minimalstelle* von $f(x)$.
Gib die Linearisierungen von $f(x)$ um x_1 und x_2 an und lasse dir den Funktionsgraphen von $f(x)$ inklusive dieser Linearisierungen in `GeoGebra` aufzeichnen.
Was ist speziell an der Linearisierung um x_2? Und weshalb ist das so?

(c) Bestimme ebenso die Quadratisierungen von $f(x)$ um x_1 und x_2 und gib sie ebenfalls in dein `GeoGebra`-File ein.
Was fällt auf bei der Quadratisierung um x_1? Warum kommt das so heraus?

(d) Kubisiere nun noch $f(x)$ um x_1 und x_2. Feststellung? Begründung?

5. ∘ *Weitere Taylor-Entwicklungen*

(a) Linearisiere die Funktion $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ in ihrem Wendepunkt. (Produkt- und Kettenregel!)

(b) Betrachte den Graphen der *Halbkreisfunktion* $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ in `GeoGebra` und bestimme ihre Quadratisierung im Maximum. (Ketten- und Quotientenregel!)

(c) Kubisiere die Cosinusfunktion $\cos x$ (Winkel x im Bogenmass!) in ihrer ersten positiven Nullstelle.

6. ∘∘ *Die Potenzreihen von Sinus- und Cosinusfunktion*

Wenn wir die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ ansetzen, so vereinfacht sich die Entwicklungsgleichung (1). Wir sprechen in diesem Fall von der *Potenzreihenentwicklung* von $f(x)$, weil nur noch einfache Potenzen von x (und nicht mehr von $(x - x_0)$) auftreten:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \tag{2}$$

Alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit der Zahl 0 in ihrem Definitionsbereich lassen sich damit als *Potenzreihe* schreiben.

(a) Gib die Potenzreihenentwicklungen von $\sin x$ und $\cos x$ an. Dazu ermittelst du am besten zuerst die ersten fünf oder sechs Glieder ganz explizit. So verstehst du, wie "der Hase läuft" und kannst anschliessend die Reihe mittels Summenzeichen vermutlich leichter notieren.

(b) Betrachte die beiden unter (a) erhaltenen Potenzreihen. Denke nun einerseits über die Symmetrien von $\sin x$ und $\cos x$ nach; verifiziere andererseits, dass $\sin' x = \cos x$ und dass $\cos' x = -\sin x$.

7. •• *Der Lorentzfaktor γ bei Alltagsgeschwindigkeiten (Näherung für kleine Geschwindigkeiten)*

Überall in der SRT taucht der *Lorentzfaktor*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \tag{3}$$

auf. Der betrachtete Körper bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v, die im Kontext der SRT sehr oft als Bruchteil β der Lichtgeschwindigkeit c angegeben wird. Ist die betrachtete Geschwindigkeit v einigermassen klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c, so schreiben wir kurz $v \ll c$ oder $\beta \approx 0$.

(a) Verdeutliche dir zuerst, welche Werte der Lorentzfaktor γ überhaupt annehmen kann. Welchen Wert hat er für $v = 0$ und wohin strebt er für $v \to c$.

(b) Fasse γ als Funktion von β auf, also $\gamma(\beta)$, und skizziere den Verlauf von γ in `GeoGebra` über dem Intervall $\beta \in [0; 1[$, also für Geschwindigkeiten von $v = 0$ bis $v \to c$.

(c) Sobald sich ein Körper bewegt ($v \neq 0$ resp. $\beta \neq 0$), weicht γ von seinem Minimalwert 1 ab. Bei "geringen Geschwindigkeiten", wie wir sie bei sämtlichen Objekten unseres Alltags antreffen, sind diese Abweichungen aber extrem klein. Trotzdem möchten wir sie beziffern können. Leider scheitert die Berechnung von solchen γ-Werten mittels Taschenrechner...

Versuche die Berechnung von γ unter Verwendung von (3) mit dem TR für die folgenden fünf Geschwindigkeitswerte:

$$v_1 = 300\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad v_2 = 30\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad v_3 = 3\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \qquad v_4 = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \qquad v_5 = 30\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Verwende dabei $c = 300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$ und mache dir zuerst jeweils bewusst, welchen (einfachen) Wert β beim jeweiligen Geschwindigkeitswert v hat.

(d) Allerdings möchten wir auch bei kleinen Geschwindigkeiten in der Lage sein zu beziffern, wie gross der Effekt der Relativitätstheorie ist. D.h., wir möchten zumindest ungefähr angeben können, wie stark γ für ein bestimmtes $v \ll c$ von 1 abweicht.

Genau diese Abweichung können wir exzellent approximieren, wenn wir den Lorentzfaktor in eine Potenzreihe entwickeln. Zunächst schreiben wir:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{mit} \quad x \equiv \beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \tag{4}$$

Bestimme nun die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung der Funktion $\gamma(x)$ und setze danach wieder β^2 resp. $\frac{v^2}{c^2}$ anstelle von x ein. (Potenzschreibweise für die Wurzel und Kettenregel beim Ableiten!)

(e) Weshalb genügt bei der Approximierung des Lorentzfaktors für $v \ll c$ jeweils die Entwicklung bis zu $\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$ und es werden keine Terme höherer Ordnung (mit β^4, β^6, etc.) benötigt?

(f) Bestimme jetzt mit deinem Resultat aus (d) resp. (e) bei den unter (c) vorgegebenen Geschwindigkeiten die Abweichung des Lorentzfaktors vom Wert 1. Mache dies zum Vergleich auch bei den Geschwindigkeiten, wo Gleichung (3) mit dem TR funktioniert hatte.

(g) Unter (b) hast du dir die Funktion $\gamma(\beta)$ in `GeoGebra` aufzeichnen lassen. Zeichne dort nun auch die Approximierung ein (nur bis zum Glied $\frac{1}{2}\beta^2$). (Nochmalige) Folgerung?!

(h) Angenommen, wir möchten den Lorentzfaktor jeweils auf ± 0.001 genau kennen.

Ab welcher Geschwindigkeit β müssen wir dann unbedingt mit der exakten Formel (3) anstelle der Approximierung $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ rechnen?

Benutze zur Beantwortung dieser Frage dein `GeoGebra`-File! (`GeoGebra` kann Schnittpunkte bestimmen und auch Gleichungen lösen!)

8. •• *Futuristische Lebensmittelkonservierung*

   Ein Joghurt ist im Kühlschrank 2 Wochen nach seiner Herstellung ungeniessbar geworden. Wie schnell müsste man den Kühlschrank samt Joghurt herumfliegen lassen, damit das Joghurt stattdessen erst nach einem Jahr (= 52 Wochen) ungeniessbar wird?

9. ◦ *Nachberechnungen zur Theorie*

   (a) Im Text zur Herleitung der Zeitdilatation haben wir bei ii. den Zeitpunkt $t = 1\,\mathrm{ns}$ betrachtet. Welche Uhrzeit hätte dort für t' angegeben sein können?

   (b) Bei iii. wurde ohne Begründung behauptet, dass im S-System die Zeit $t = 1.25\,\mathrm{ns}$ erreicht ist. Zeige, dass dies zutrifft und dass die Lichtuhr L' dann tatsächlich bei $x = 22.5\,\mathrm{cm}$ vorbeikommt.

10. ◦ *Die Grösse der Lichtgeschwindigkeit*

    7.5-mal um die Erde in einer Sekunde – Ja, so ungeheuer gross ist die Lichtgeschwindigkeit! Hier aber noch eine andere Verdeutlichung zum Wert von c...

    Angenommen, wir könnten einen Stein fallen lassen und er würde dann beliebig lange mit der Fallbeschleunigung von $g \approx 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ beschleunigen. Wie lange müssten wir warten, bis er Lichtgeschwindigkeit erreicht hat? Gib das Resultat in einer anschaulichen Zeiteinheit an!

11. • *Weiteres zum Grundverständnis der SRT...*

    (a) *Prinzipielles:* Einstein beschäftigte sich in seiner Jugend unter anderem mit folgendem Problem: Ein Läufer betrachtet sich in einem Spiegel, den er vor sich her trägt.

    Wie sieht sich der Läufer im Spiegel, wenn er fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist?

    (b) *Zeitdilatation:* "Wenn ich in einem sehr schnellen Zug ein Buch lese, so unterliege ich der Zeitdilatation und habe daher mehr Zeit für meine Lektüre."

    Wo liegt der Verständnisfehler in diesem Gedankengang?

12. • *Wissenschaftlicher Austausch zwischen den Welten*

    Eine ausserirdische Zivilisation lebe auf ihren beiden Heimplaneten *Caprica* und *Kobol*, welche relativ zueinander ruhen und in ihrem Eigensystem einen Abstand von 57.2 Lichttagen aufweisen.

    Die ausserirdischen Wissenschafter haben bereits früh fantastische Fortschritte in der Raumfahrttechnik erzielt, dafür aber erst kürzlich die Radioaktivität entdeckt...

    Ein Wissenschafter auf *Kobol* möchte seinem Kollegen auf *Caprica* eine Probe P–32 zustellen. Er hat in seinem Labor bereits die Halbwertszeit dieses Phosphor-Isotops ermittelt: 14.3 Tage.

    Welchen Prozentsatz der ursprünglichen Probe erhält der Kollege auf *Caprica* noch im unzerfallenen Zustand, wenn das Transportraumschiff im System der Planeten konstant mit $80\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist?

13. • *"TPV – Train à Petite Vitesse"*

    Der *TGV* – Train à Grande Vitesse" – fährt mit einer Reisegeschwindigkeit von $350\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ an einem Bahnhof vorbei. Wie viel Zeit **mehr** vergeht aus der Perspektive des Bahnhofvorstehers auf der Bahnhofsuhr, wenn aus seiner Sicht auf der Borduhr des Zuges genau $15\,\mathrm{min}$ verstreichen?

    Tipp: Benutze die in Aufgabe 7 entwickelte Approximation für den Lorentzfaktor γ.