Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 2: Längenkontraktion und mehr zur Zeitdilatation – LÖSUNGEN

1. •• *Ein Flug zum Zentrum der Galaxis*

   (a) Die Strecke ℓ zum Zentrum der Milchstrasse ist offensichtlich im Erdsystem angegeben. Folglich ist auch die Lichtlaufzeit, die wir daraus berechnen, eine Angabe in diesem System:

   $$t_{\mathrm{L}} = \frac{\ell}{c} = \frac{28\,000\,c\,\mathrm{a}}{c} = \underline{\underline{28\,000\,\mathrm{a}}}$$

   Vom Zentrum der Galaxis bis zu uns ist das Licht $28\,000$ Jahre lang unterwegs.
   Das Raumschiff braucht für die Strecke ℓ zum Zentrum der Milchstrasse aus Sicht der Erde nur ein klein wenig länger als das Licht, denn schliesslich ist es ja fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs:

   $$t_{\mathrm{S}} = \frac{\ell}{v} = \frac{28\,000\,c\,\mathrm{a}}{0.999\,c} = \underline{\underline{28\,028\,\mathrm{a}}}$$

   Bemerke: Mit Lichtjahren und dem Ausdruck $v = \beta \cdot c$ lässt sich wahnsinnig einfach rechnen, weil $1\,\mathrm{LJ} = c\,\mathrm{a}$ ist und sich die Lichtgeschwindigkeit c so rauskürzt – was auch in weiteren Rechnungen oft der Fall sein wird.

   (b) Wir berechnen zunächst den Lorentzfaktor:

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.999^2}} = 22.366$$

   Im Raumschiff vergeht aus Sicht der Erde die Zeit langsamer. Für die Reisezeit t'_{S} folgt aus der Zeitdilatationsgleichung:

   $$t'_{\mathrm{S}} = \frac{t_{\mathrm{S}}}{\gamma} = \frac{28\,028\,\mathrm{a}}{22.366} = \underline{\underline{1253\,\mathrm{a}}}$$

   Eine Geschwindigkeit von $99.9\,\%$ würde also noch nicht reichen, damit ein Mensch innerhalb seines Lebens bis zum Zentrum der Milchstrasse reisen könnte.

   (c) Das geht, weil aus der Sicht des Raumschiffs die Strecke zum Zentrum der Milchstrasse längenkontrahiert erscheint. diese Strecke bewegt sich aus Sicht des Raumschiffs am Raumschiff vobei und wegen der Verkürzung reichen dafür $1253\,\mathrm{a}$. Es wird keine Überlichtgeschwindigkeit benötigt.

   (d) Der Lorentzfaktor ist immer noch derselbe, denn aus der Sicht des Raumschiffs bewegt sich die Milchstrasse mit $99.9\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit. Somit folgt für die längenkontrahierte Distanz zum Zentrum der Milchstrasse:

   $$\ell' = \frac{\ell}{\gamma} = \frac{28\,000\,\mathrm{LJ}}{22.366} = \underline{\underline{1252\,\mathrm{LJ}}}$$

   Dasselbe Resultat erhalten wir natürlich auch aus der folgenden Rechnung:

   $$\ell' = v \cdot t'_{\mathrm{S}} = 0.999\,c \cdot 1253\,\mathrm{a} = \underline{\underline{1252\,\mathrm{LJ}}}$$

2. • *Myonen im Speicherring*

   Im Eigensystem der Myonen beträgt die Halbwertzeit $T'_{1/2} = 1.52\,\mathrm{\mu s}$. Diese Zeit erscheint aus der Sicht eines sich relativ zum Myon bewegenden Beobachters gedehnt. Aus der angegebenen Geschwindigkeit der Myonen $v = 99.94\,\%\,c$ resp. $\beta = 0.9994$ berechnen wir für den Lorentzfaktor:

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9994^2}} \approx 28.87$$

   Daraus ergibt sich für die gedehnte Halbwertszeit:

   $$T_{1/2} = \gamma \cdot T'_{1/2} \approx 28.87 \cdot 1.52\,\mathrm{\mu s} = \underline{\underline{43.9\,\mathrm{\mu s}}}$$

3. ●● *Vorbereitung des "Limousinen-Garage-Paradoxons"*

(a) Die Garagenlänge $\ell = 12\,\mathrm{m}$ muss der kontrahierten Länge der Limousine entsprechen. Mit deren Eigenlänge $\ell' = 13\,\mathrm{m}$ erhalten wir für den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{13\,\mathrm{m}}{12\,\mathrm{m}} = \frac{13}{12}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeit β:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad\Leftrightarrow\quad \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \quad\Leftrightarrow\quad 1-\beta^2 = \frac{1}{\gamma^2} \quad\Leftrightarrow\quad \beta^2 = 1-\frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{13}{12}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{12^2}{13^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{13^2-12^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{169-144}{13^2}} = \sqrt{\frac{25}{13^2}} = \frac{5}{13} \approx \underline{\underline{38.46\,\%}}$$

(b) Wir führen im Prinzip die genau gleiche Rechnung wie unter (a) durch:

$$\gamma = \frac{\ell'}{\ell} = \frac{12\,\mathrm{m}}{7.2\,\mathrm{m}} = \frac{12}{7.2} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$$

Somit erhalten wir für die Relativgeschwindigkeit β:

$$\beta = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{5^2-3^2}{5^2}} = \sqrt{\frac{25-9}{5^2}} = \sqrt{\frac{16}{5^2}} = \frac{4}{5} = \underline{\underline{80\,\%}}$$

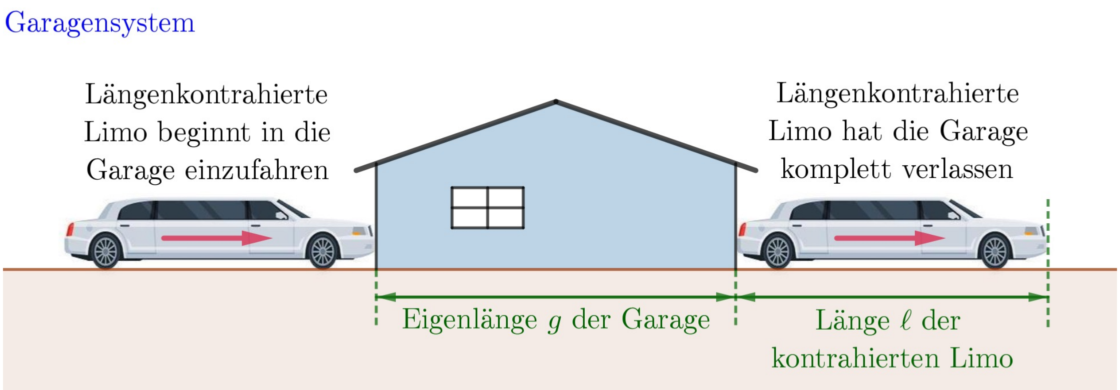
(c) Berechnen wir zunächst den Lorentzfaktor nochmals neu:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{6}{10}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{36}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{64}{100}}} = \frac{1}{\frac{8}{10}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Damit beträgt die Länge der Limousine im Garagensystem:

$$\ell = \frac{\ell'}{\gamma} = \frac{13\,\mathrm{m}}{\frac{5}{4}} = \frac{52}{5}\,\mathrm{m} = 10.4\,\mathrm{m}$$

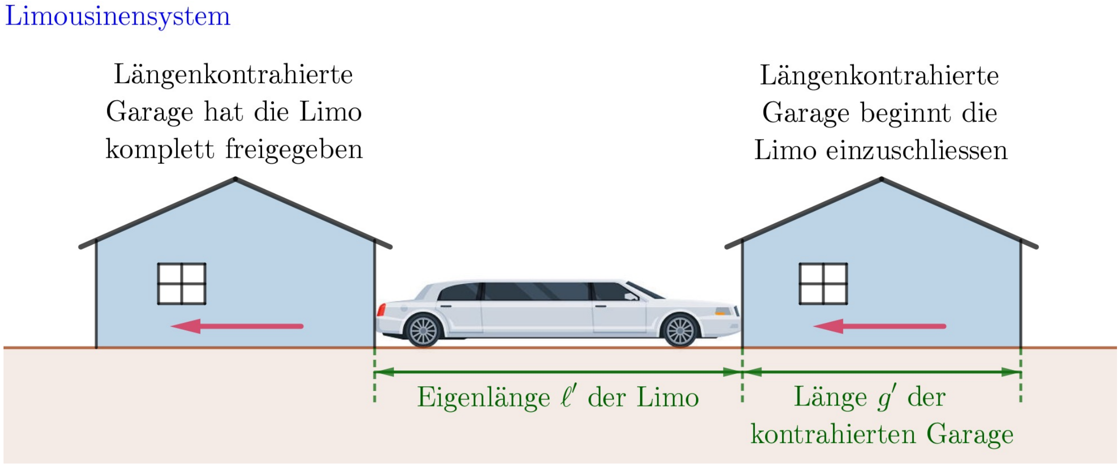
Somit muss die Limousine im Garagensystem insgesamt $s = g + \ell = 12\,\mathrm{m} + 10.4\,\mathrm{m} = 22.4\,\mathrm{m}$ Strecke zurücklegen, wie die folgende Grafik zeigt:



Aus dieser Länge s lässt sich im Garagensystem sofort berechnen, wie lange die Durchfahrt dauert:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{22.4\,\mathrm{m}}{0.6\,c} = \frac{22.4\,\mathrm{m}}{0.6\cdot 3\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.244\cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{124.4\,\mathrm{ns}}}$$

(d) Der Lorentzfaktor bleibt derselbe wie unter (c). Betrachten wir den Vorgang im Limousinensystem:



Die Länge der längenkontrahierten Garage beträgt nun:

$$g' = \frac{g}{\gamma} = \frac{12\,\mathrm{m}}{\frac{5}{4}} = \frac{48}{5}\,\mathrm{m} = 9.6\,\mathrm{m}$$

Somit muss die kontrahierte Garage im Limousinensystem insgesamt $s' = g' + \ell' = 13\,\mathrm{m} + 9.6\,\mathrm{m} = 22.6\,\mathrm{m}$ Strecke zurücklegen. Die dafür benötigte Zeit beträgt – natürlich immer noch im Limousinensystem:

$$t' = \frac{s'}{v} = \frac{22.6\,\mathrm{m}}{0.6\,c} = \frac{22.6\,\mathrm{m}}{0.6 \cdot 3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1.255 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{s} = \underline{\underline{125.5\,\mathrm{ns}}}$$

(e) Die beiden unter (c) und (d) berechneten Zeiten t und t' sind nicht via Zeitdilatationsgleichung $t = \gamma\, t'$ miteinander verbunden, denn auch wenn der Vorgang in beiden System dasselbe Anfangskriterium (Spitze der Limousine beginnt sich in der Garage zu befinden) und dasselbe Endkriterium (Ende der Limousine verlässt die Garage) aufweist, so erfüllt dieser Vorgang nicht die Kriterien, um der Zeitdilatationsgleichung zu genügen. Wir erinnern uns (Merkkasten auf den Unterlagen zur Herleitung der Zeitdilatation):

Bewegt sich ein Inertialsystem S' relativ zu einem anderen Inertialsystem S mit konstanter Geschwindigkeit v, so wird ein Vorgang (z.B. das Ticken einer Uhr), der in S' ruht und die Zeit t' dauert, für den Beobachter in S verlängert auf

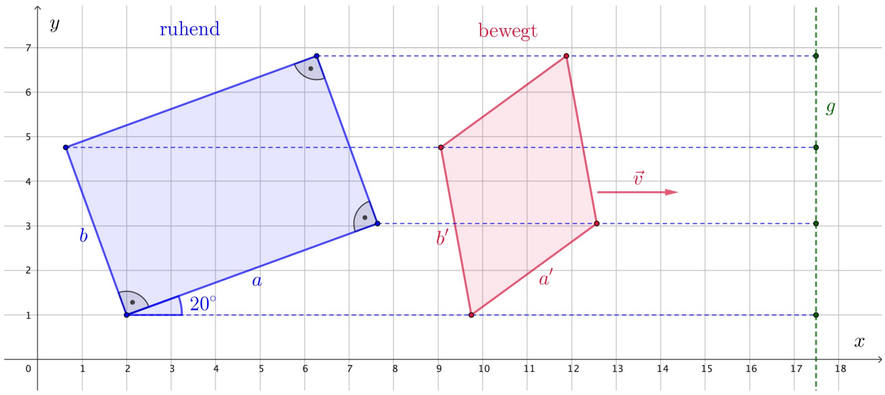
$$t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma t' \geq t'$$

Dieses Phänomen heißt **Zeitdilatation**, *d.h. wörtlich Zeitdehnung.*

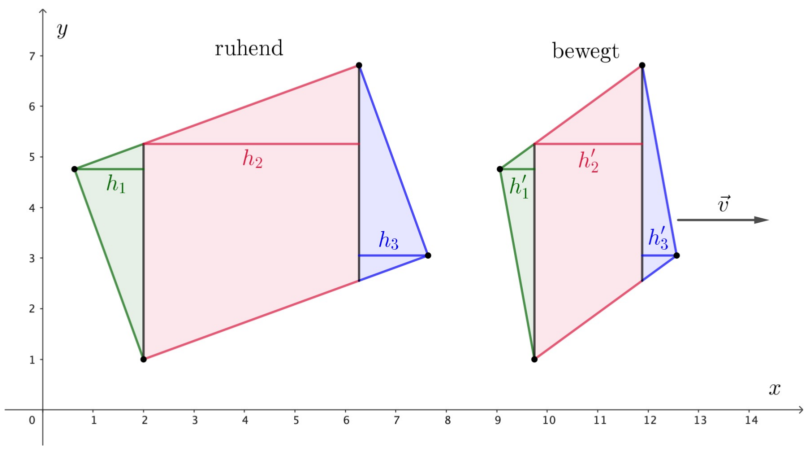
Unser Vorgang "ruht" aber in keinem der beiden Bezugssysteme. Das erkennen wir daran, dass unser Start- und unser Endkriterium an verschiedenen Orten im System stattfindet. In diesem Sinne könnte man also sagen: "In jedem der beiden Systeme hat sich der Vorgang verschoben, weil Start- und Endereignis nicht am gleichen Ort stattfinden."

4. ○ *Verformung eines Rechtecks*

   (a) Im Prinzip müssen wir das Rechteck einfach horizontal, also parallel zur x-Achse mit Faktor $\frac{1}{2}$ stauchen. Dazu tragen wir z.B. eine Vertikale g ein, fällen von jedem Eckpunkt der ruhenden Figur das Lot auf diese Gerade und können anschliessend alle Strecken zwischen Eck- und Lotpunkt halbieren. So ergeben sich die Eckpunkte der bewegten Figur zu $\gamma = 2$:



   (b) Unterteilen wir das Parallelogramm in drei Teilflächen – zwei Dreieck und ein Parallelogramm mit zwei Seiten parallel zur y-Achse – so sehen wir direkt ein, dass jede dieser neuen Figuren eine Höhe besitzt, die parallel zur x-Achse liegt und somit während der Bewegung in x-Richtung mit dem Lorentzfaktor γ gestaucht wird ($h_1' = \frac{h_1}{\gamma}$, $h_2' = \frac{h_2}{\gamma}$, $h_3' = \frac{h_3}{\gamma}$), wobei gleichzeitig die Grundseite in y-Richtung unverändert bleibt:



   Demnach wird mit $\gamma = 2$ die Gesamtfläche halbiert. Es ergibt sich:

$$A' = \frac{A}{\gamma} = \frac{a \cdot b}{\gamma} = \frac{6\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}}{2} = \underline{\underline{12\,\mathrm{cm}^2}}$$

   (c) Das haben wir unter (b) gerade ganz allgemein erledigt.

5. • *Längenkontraktion in der Radarkontrolle*

   Der VW Käfer ist mit halber Lichtgeschwindigkeit unterwegs. Für den zugehörigen Lorentzfaktor folgt:

$$\gamma_{\mathrm{VW}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_{\mathrm{VW}}^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

   Da der Lincoln im ruhend doppelt so lange ist wie der Käfer, muss sein Lorentzfaktor doppelt so gross sein wie derjenige des Käfers. Daraus schliessen wir auf die Geschwindigkeit des Lincolns:

$$\beta_{\mathrm{Lincoln}} = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma_{\mathrm{Lincoln}}^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{\frac{16}{3}}} = \sqrt{1-\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{13}{16}} \approx 0.9014 = \underline{\underline{90.14\,\%}}$$

   Der Lincoln ist also mit gut $90\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs.

6. • *Star Wars*

(a) Der Lorentzfaktor der Relativbewegung von Raumschiffen und Planet beträgt

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{55}{73}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{73^2-55^2}{73^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{48^2}{73^2}}} = \frac{1}{\frac{48}{73}} = \frac{73}{48}$$

Damit können wir die aus Sicht von Tatooine längenkontrahierte Distanz zwischen den beiden Raumschiffen ins Raumschiffsystem umrechnen:

$$d' = \gamma \cdot d = \frac{73}{48} \cdot 480\,000\,\mathrm{km} = 730\,000\,\mathrm{km}$$

Im Raumschiffsystem beträgt folglich die Zeit, die der Radarimpuls braucht, um die Strecke zwischen den Raumschiffen hin und zurück zurückzulegen:

$$t' = \frac{2d}{c} = \frac{2 \cdot 730\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = \underline{\underline{4.867\,\mathrm{s}}}$$

Mit dieser Periode senden also beide Schiffe gemäss ihrer Borduhren Radarimpulse aus.

(b) Natürlich könnte man die unter (a) errechnete Zeit auch anders erhalten, indem wir die Laufzeit des Radarimpulses im Planetensystem betrachten. Dann gibt es allerdings zwei Zeiten zu berechnen, denn das Radarsignal von Han zu Luke muss dem davon eilenden X-Wing Fighter hinterherfliegen, während in die Gegenrichtung der Millenium Falcon dem Radarsignal entgegen kommt.

Es ist folglich ganz klar, dass das Signal von Luke zu Han aus Sicht von Tatooine weniger Zeit braucht als das Signal in die Gegenrichtung.

(c) Jetzt führen wir diese Überlegungen auch noch quantitativ aus...

Ist t_1 die Zeit, die das Radarsignal von Han zu Luke benötigt, so gilt aufgrund obiger Überlegung für die vom Radarsignal in diese Richtung zurückgelegte Wegstrecke s_1:

$$s_1 = d + v \cdot t_1 \stackrel{!}{=} c \cdot t_1 \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = \frac{d}{c-v} = \frac{480\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot (1 - \frac{55}{73})} = 6.4889\,\mathrm{s}$$

Ganz analog finden wir für die Wegstrecke s_2 resp. die Zeit t_2 des Signals vom Fighter zum Falcon:

$$s_2 = d - v \cdot t_2 \stackrel{!}{=} c \cdot t_2 \quad \Leftrightarrow \quad t_2 = \frac{d}{c+v} = \frac{480\,000\,\mathrm{km}}{300\,000\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot (1 + \frac{55}{73})} = 0.9125\,\mathrm{s}$$

Die totale Laufzeit des Radarsignals beträgt somit im Planetensystem:

$$t = 6.4889\,\mathrm{s} + 0.9125\,\mathrm{s} = 7.4014\,\mathrm{s}$$

Diese Zeit können wir mittels Zeitdilatation ins Raumschiffsystem umrechnen. Dort verstreicht unterdessen weniger Zeit als auf einer Tatooine-Uhr, nämlich:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{7.4014\,\mathrm{s}}{\frac{73}{48}} = 7.4014\,\mathrm{s} \cdot \frac{48}{73} = 4.867\,\mathrm{s}$$

Das bestätigt unser Resultat aus Aufgabe (a).

Bemerkung: Die beiden Raumschiffe bilden mit den Radarimpulsen eigentlich einfach eine sehr grosse Lichtuhr, die in ihrem Eigensysstem die Periode $t' = 4.867\,\mathrm{s}$ aufweist. Die Überlegungen und Rechnungen unter (b) und (c) entsprechen genau unseren Ausführungen bei der Herleitung der Längenkontraktion!

7. ○ *Eigenzeit und Eigenlänge I*

Angegeben ist die Zeit $t = 10\,\mathrm{s}$, die ein Vorgang im System eines Beobachters in Anspruch nimmt. Zudem wird gesagt, welche Strecke s das Eigensystem des Vorgangs während dieser Zeit zurücklegt. Aus diesen beiden Angaben können wir direkt auf die Relativgeschwindigkeit v der Systeme schliessen:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{s}} = 10^4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Daraus folgt sofort auch der Wert des Lorentzfaktors:

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{10^4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = \frac{1}{30} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{30}\right)^2}} \approx 1.000556$$

Daraus folgt für die Eigenzeit des Vorgangs:

$$t' = \frac{t}{\gamma} \approx \frac{10\,\mathrm{s}}{1.000556} = \underline{\underline{9.994\,\mathrm{s}}}$$

Trotz der bereits sehr grossen Geschwindigkeit ($\frac{1}{30}\,c$) ist der Effekt der Zeitdilatation noch ziemlich gering – auf $10\,\mathrm{s}$ nur ein Unterschied von $0.0056\,\mathrm{s} = 5.6\,\mathrm{ms}$.

Aus der Sicht des Vorgangsbewegt sich die Erde ebenfalls mit der Relativgeschwindigkeit $v = 10^4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$und der Vorgang dauert, wie eben berechnet, $t' = 9.994\,\mathrm{s}$. Folglich legt die Erde während diesem Vorgang die Strecke

$$s' = v \cdot t' = 10^4\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 9.994\,\mathrm{s} = \underline{\underline{0.9994 \cdot 10^5\,\mathrm{km}}} \approx 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$$

zurück, also fast genau gleich viel wie der Vorgang aus Sicht der Erde.

Schauen wir noch die anderen Werte mit höheren Relativgeschwindigkeiten an. Da müssten sich stärkere relativistische Effekte ergeben.

Zunächst $t = 10\,\mathrm{s}$ und $s = 1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{s}} = 1.2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{1.2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}} \approx 1.0911 \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{t}{\gamma} \approx \frac{10\,\mathrm{s}}{1.0911} = \underline{\underline{9.165\,\mathrm{s}}}$$

$$\Rightarrow \quad s' = v \cdot t' = 1.2 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 9.165\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1.100 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}} < 1.2 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

Nun ist sind Zeitdilatation und Längenkontraktion schon deutlicher sichtbar.

Und schliesslich noch für $t = 10\,\mathrm{s}$ und $s = 2.5 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2.5 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{s}} = 2.5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{v}{c} = \frac{2.5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}}{3 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2}} \approx 1.8091 \quad \Rightarrow \quad t' = \frac{t}{\gamma} \approx \frac{10\,\mathrm{s}}{1.8091} = \underline{\underline{5.528\,\mathrm{s}}}$$

$$\Rightarrow \quad s' = v \cdot t' = 2.5 \cdot 10^5\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} \cdot 5.528\,\mathrm{s} = \underline{\underline{1.382 \cdot 10^6\,\mathrm{km}}} < 2.5 \cdot 10^6\,\mathrm{km}$$

Jetzt fallen die relativistischen Effekt ganz beträchtlich ins Gewicht.

8. • *Eigenzeit und Eigenlänge II*

(a) Vom Erdsystem aus gesehen ist v die Geschwindigkeit des Raumschiffs und t die Zeit, die verstreicht, bis dieses die entsprechende Distanz s zurückgelegt hat. Es gilt die altbekannte Beziehung für gleichförmige Bewegungen:

$$s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v}$$

$\tau = 1\,\mathrm{Jahr} = 1\,\mathrm{a}$ ist die Zeit, die während der Reise auf einer Uhr im Raumschiff vergeht. Dann ist die Zeit t, die während der Reise auf einer Uhr auf der Erde vergeht, gegeben durch:

$$t = \gamma \cdot \tau = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Nun haben wir zwei Ausdrücke für die im Erdsystem gemessene Zeit t. Diese setzen wir gleich, woraus sich auf die Geschwindigkeit schliessen lässt. Statt v verwenden wir aber lieber β – damit wird die Rechnung etwas übersichtlicher:

$$\begin{aligned}
& t = \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \overset{!}{=} \frac{s}{v} && \Big|\, \beta = \frac{v}{c} \text{ resp. } v = \beta c \\
& \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{s}{\beta c} && \big|\, (\ldots)^2 \\
\Rightarrow\quad & \frac{\tau^2}{1-\beta^2} = \frac{s^2}{\beta^2 c^2} && \big|\, \cdot \beta^2 c^2 \left(1-\beta^2\right) \\
\Rightarrow\quad & \beta^2 c^2 \tau^2 = s^2\left(1-\beta^2\right) && \big|\, \text{ausmultiplizieren} \\
\Leftrightarrow\quad & \beta^2 c^2 \tau^2 = s^2 - \beta^2 s^2 && \big|\, +\beta^2 s^2 \\
\Leftrightarrow\quad & \beta^2 c^2 \tau^2 + \beta^2 s^2 = s^2 && \big|\, \beta^2 \text{ ausklammern} \\
\Rightarrow\quad & \beta^2\left(c^2\tau^2 + s^2\right) = s^2 && \big|\, : \left(c^2\tau^2 + s^2\right) \\
\Rightarrow\quad & \beta^2 = \frac{s^2}{c^2\tau^2 + s^2} = \frac{s^2}{s^2\left(\frac{c^2\tau^2}{s^2} + 1\right)} = \frac{1}{1 + \frac{c^2\tau^2}{s^2}} && \big|\, \sqrt{\cdots} \\
\Rightarrow\quad & \beta = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{c^2\tau^2}{s^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\tau}{s}\right)^2}}
\end{aligned}$$

Der erhaltene Ausdruck sieht im ersten Moment kompliziert aus, bewährt sich aber sofort, wenn wir Distanzen in Lichtjahren ($1\,\mathrm{LJ} = c\,\mathrm{a}$) und Zeiten in Jahren ($\mathrm{a}$) einsetzen.
Für die Eigenzeit $\tau = 1\,\mathrm{a}$ und die Strecke $s = 4.2\,\mathrm{LJ} = 4.2\,c\,\mathrm{a}$ ergibt sich z.B.:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\tau}{s}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{c\cdot 1\,\mathrm{a}}{4.2\,c\,\mathrm{a}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4.2^2}}} = 0.9728 = 97.28\,\%$$

Um nur ein Jahr älter bei Proxima Centauri anzukommen, müsste man also bereits mit $\beta = 97.28\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit unterwegs sein.
Für die anderen beiden Distanzen ergeben sich Geschwindigkeitswerte, die noch näher an der Lichtgeschwindigkeit liegen:

Reiseziel	**Proxima Centauri**	**Mizar**	**Polarstern**
Distanz im Erdsystem	$4.2\,\mathrm{LJ}$	$83\,\mathrm{LJ}$	$448\,\mathrm{LJ}$
β	$97.28062\,\%$	$99.99274\,\%$	$99.99975\,\%$

(b) Wir können vorab vermuten, wie gross die jeweiligen Distanzen in etwa sein müssen: Im Eigensystem des Raumschiffs soll jeweils ein Jahr vergehen, während dem der Stern die Distanz zum Raumschiff zurücklegt und Letzteres selber in Ruhe bleibt. Folglich müssen alle Distanzen kleiner als $1\,\mathrm{LJ}$ sein, denn die Sterne bewegen sich ja mit Unterlichtgeschwindigkeit und haben für die Strecke nur ein Jahr Zeit zur Verfügung.

Nun wollen wir rechnen... Die Relativgeschwindigkeit zwischen Raumschiff und (Erde+Stern) ist ja dieselbe, die wir unter (a) errechnet haben. Daraus schliessen wir auf den Lorentzfaktor und können mit der Längenkontraktion direkt die Distanz zum jeweiligen Stern ins Raumschiffsystem transformieren. Ich mache das ausführlich am Beispiel von Proxima Centauri:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.9728062^2}} = 4.3174$$

$$\Rightarrow \quad \ell' = \frac{\ell}{\gamma} = \frac{4.2\,\mathrm{LJ}}{4.3174} \approx \underline{\underline{0.97281\,\mathrm{LJ}}}$$

Für die anderen beiden Reiseziele lässt sich dies genau gleich durchführen. Hier die Resultate in der Übersicht:

Reiseziel	**Proxima Centauri**	**Mizar**	**Polarstern**
Distanz im Erdsystem	$4.2\,\mathrm{LJ}$	$83\,\mathrm{LJ}$	$448\,\mathrm{LJ}$
β	$97.28062\,\%$	$99.99274\,\%$	$99.99975\,\%$
γ	4.317405	83.005780	448.001094
Distanz im Raumschiffsystem	$0.97280771\,\mathrm{LJ}$	$0.99993036\,\mathrm{LJ}$	$0.99999756\,\mathrm{LJ}$

Die Distanz im Raumschiffsystem wird bei höherer Geschwindigkeit immer mehr zu genau einem Lichtjahr, weil halt die Geschwindigkeit v auch immer mehr zur Lichtgeschwindigkeit c wird.

9. ○○ *Ein bisschen "Elektrodynamik bewegter Körper"*

Im System der Leitunselektronen bewegen sich die Atomrümpfe in Stromrichtung, also in der Abbildung nach unten. Tatsächlich können wir nun die Anziehung, die das einzelne Elektron rechts erfährt, nicht mehr mit einer Lorentzkraft begründen, weil dieses Elektron in seinem eigenen System ruht. Wie kommt diese Anziehung denn nun zustande?

Der Punkt ist, dass nun das Volumen der Atomrümpfe im Draht D_1 (und natürlich auch in Draht D_2) in Bewegungsrichtung längenkontrahiert erscheint. Das bedeutet aber, dass sich die positiven Ladungen im Draht im Schnitt näher beieinander befinden als die negativ geladenen Leitungselektronen. Daraus folgt, dass die Drähte im System der Leitungselektronen nicht mehr elektrisch neutral erscheinen, sondern tatsächlich positiv geladen sind.

Nun verstehen wir, dass die Anziehung zwischen Draht D_1 und dem Leitungselektron rechts im Bezugssystem der Leitungselektronen eine**Coulombkraft** ist. Der positiv geladene Draht D_1 und das Elektron ziehen sich aufgrund ihrer elektrischen Ladungen an!

Bemerke: Das eigentlich Bemerkenswerte ist, dass der Draht in unserem Laborsystem elektrisch neutral erscheint, auch wenn da Strom fliesst!

Schlusswort: Wir haben hier ein sehr tolles Beispiel vor Augen, wie die Gesetze des Elektromagnetismus beim Wechsel des Bezugssystems ineinander übergehen. Was im einen Bezugssystem eine Lorentzkraft ist, kann in der Betrachtung eines anderen Bezugssystems eine Coulombkraft sein. Das ist schon sehr bemerkenswert!