Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 3: Lorentz-Transformation und Minkowski-Diagramme

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ◦ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ◦◦ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

N.B.: Gehe bei allen Aufgaben davon aus, dass die Inertialsysteme S und S' in *Standardorientierung* zueinander liegen → Achsenparallelität, aus der Sicht von S bewegt sich S' mit der Geschwindigkeit v resp. β in x-Richtung, die beiden Koordinatenursprünge fallen zusammen: $O(x,t) = (0,0) = O'(x',t')$.

1. • *Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft*

   Ein Ereignis E finde im S-System bezüglich des Ursprungs 2 Jahre in der Zukunft und 6 Lichtjahre in der positiven Richtung der x-Achse entfernt statt. Das S'-System bewege sich in S mit $\beta = \frac{1}{3}$.

   (a) Wann und wo findet dieses Ereignis in S' statt?

   (b) Skizziere das Ereignis E in einem Minkowski-Diagramm mit den Koordinatensystem zu S und S'.

   (c) Wie sieht es mit den Koordinaten von E im System S'' aus, wenn sich dieses aus der Sicht von S mit $\beta = -\frac{1}{3}$ bewegt? Schaue dir auch hier das Minkowski-Diagramm an.

   (d) Liegt das Ereignis E bezüglich des Ursprungs in der Zukunft, in der Gegenwart oder in der Vergangenheit? Gib in jedem der drei Systeme eine Antwort.

   (e) Stimmt die folgende Aussage? Begründe deine Antwort.

   "Je näher das Ereignis E am Ursprungsereignis 0 liegt – das ist örtlich gemeint – desto geringer sind die Unterschiede in den Zeitkoordinaten t, t' und t'' in den verschiedenen Bezugssystemen.

2. • *Gleichzeitigkeit im Minkowski-Diagramm*

   (a) Wo liegen in einem Minkowski-Diagramm alle Ereignisse, die im S-System gleichzeitig, z.B. zum Zeitpunkt $t = 3\,\mathrm{s}$, stattfinden?

   (b) Wo liegen alle Ereignisse, die im S'-System ($\beta = \frac{3}{5}$) zum Zeitpunkt $t' = 3\,\mathrm{s}$, also gleichzeitig stattfinden?

3. • *Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm*

   System S' bewege sich relativ zum System S mit $\beta = 0.73$. Das Ereignis P habe im System S' die Koordinaten $(t', x') = (3\,\mathrm{J}, 0)$. Das Ereignis Q hat im S-System die Koordinaten $(t, x) = (3\,\mathrm{J}, 0)$.

   Berechne die Koordinaten von P und Q im jeweils anderen System, zeichne ein Minkowski-Diagramm dazu und begründe, weshalb ein Beobachter im einen System und ein Beobachter im anderen System eine Uhr im jeweils anderen System langsamer laufen sehen.

4. • *Raumschiff und Lichtsignal*

   Ein Raumschiff (System S') passiert die Erde (System S) mit $\beta = 0.2$ bei $t = 0 = t'$ in Richtung Mond (Entfernung $380\,000\,\mathrm{km}$). Bei $t = 2.0\,\mathrm{s}$ wird ein Lichtsignal von der Erde zum Mond ausgesendet (E_1) und dort reflektiert. Wo und wann passiert das Lichtsignal das Raumschiff?

   Löse die Aufgabe grafisch und rechnerisch für das S-System. Transformiere dann ins S'-System (= Raumschiffsystem) und gib die Koordinaten aller relevanten Ereignisse dort an.

5. •• *Das Limousinen-Garage-Paradoxon*

   Eine überdimensionierte Stretch-Limousine der Eigenlänge $300\,\mathrm{m}$ *(= 1 Licht-Mikrosekunde) bewege sich mit einer Geschwindigkeit von* $0.5\,c$ *auf eine Garage mit ebenfalls Eigenlänge* $300\,\mathrm{m}$ *zu. Im Ruhesystem der Garage wird die Limousine verkürzt und passt in die Garage. Im Ruhesystem der Limousine wird die Garage verkürzt und ist somit zu klein für die Limousine.*

   Löse dieses Paradoxon auf, indem du ein passendes Minkowski-Diagramm skizzierst und allfällige Berechnungen vornimmst.

6. •• *Das Star-Wars-Paradoxon*

   Zwei Raumschiffe mit Eigenlänge $300\,\mathrm{km}$ *fliegen mit hoher Relativgeschwindigkeit (*$v = 0.6\,c$*) aneinander vorbei. Raumschiff A feuert vom hinteren Ende aus ein Geschoss senkrecht zur Flugrichtung auf Raumschiff B. Die Eigenlängen seien sehr viel grösser als der gegenseitige Abstand der Raumschiffe, sodass die Flugzeit des Geschosses vernachlässigt werden kann. Stellen wir uns vor, der Abschuss – und damit auch der eventuelle Einschlag – erfolge in dem Moment, in dem die Spitze des Raumschiffs A am Ende des Raumschiffs B vorbeifliegt. Im System des Raumschiffs A ist B längenkontrahiert und der Schuss geht daneben; im System des Raumschiffs B ist A längenkontrahiert und der Schuss trifft.*

   Trifft nun der Schuss oder nicht? Stelle passende Überlegungen an und skizziere in einem Minkowski-Diagramm.

7. •• *Das Zwillings-Paradoxon – zum Ersten*

   Ein Raumschiff fliegt von der Erde aus mit $v = \frac{4}{5}\,c$ nach *Proxima Centauri* in $4.2\,\mathrm{LJ}$ Entfernung.

   Das Raumschiff startet am Geburtstag zweier Zwillinge, von denen einer mitfliegt. Immer am Geburtstag sendet jeder der beiden Zwillinge ein Radarsignal in Richtung des jeweils anderen aus.

   Sobald das Raumschiff bei Proxima Centauri ankommt, kehrt es auch gleich wieder um.

   (a) Skizziere die ganze Aufgabe in einem Minkowski-Diagramm.
   (b) Wie alt sind die beiden Zwillinge bei der Rückkehr des Raumschiffs?
   (c) Wie viele Geburtstagsgrüsse hat jeder der beiden versendet?
   (d) Wie viel Zeit ist auf der Borduhr des Raumschiffs seit dessen Start verstrichen, wenn dort der zweite Geburtstagsgruss vom Zwilling auf der Erde eintrifft?

8. ∘∘ *Längenkontraktion als Konsequenz der Lorentz-Transformation*

   > *Bewegt sich ein Inertialsystem* S' *relativ zu einem anderen Inertialsystem* S *mit konstanter Geschwindigkeit* v*, so wird eine Länge in Bewegungsrichtung, die in* S' *ruht und den Betrag* ℓ' *hat, für den Beobachter in* S *verkürzt auf*
   >
   > $$\ell = \ell' \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \ell' \cdot \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{\ell'}{\gamma} \leq \ell' \quad .$$
   >
   > *Dieses Phänomen heißt* **Längenkontraktion***, d.h. wörtlich "Längenzusammenziehung".*

   So hatten wir die Längenkontraktion nach unserer Herleitung festgehalten. Natürlich muss diese Längenkontraktion auch in der Lorentz-Transformation zwischen den beiden Systemen S und S' enthalten sein.

   Leite nun selber die Längenkontraktionsgleichung aus der Lorentz-Transformation her!

   Hinweis: Die Längen ℓ resp. ℓ' werden im jeweiligen System gemessen. Dabei bedeutet *messen*, dass der Startort x_1 resp. x_1' und der Endort x_2 resp. x_2' eines Objektes im jeweiligen System *gleichzeitig* ermittelt werden. Die Länge ist dann die Differenz zwischen diesen beiden Orten:

   $$\ell = x_2 - x_1 \qquad \text{resp.} \qquad \ell' = x_2' - x_1'$$