Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 4: Geschwindigkeits- und Beschleunigungstransformation – LÖSUNGEN

1. •• *Die Herleitung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

   (a) *Variante 1: Rechnen mit Ereigniskoordinaten*

   Für die Geschwindigkeitskomponente u_x im Bezugssystem S ergibt sich unter Verwendung der in der Aufgabenstellung beschriebenen Ereignisse O und E und mit der Lorentz-Rücktransformation:

$$u_x = \frac{x}{t} = \frac{\gamma\,(x' + \beta c t')}{\gamma\,(t' + \frac{\beta}{c}\,x')} = \frac{x' + \beta c t'}{t' + \frac{\beta}{c}\,x'}$$

   Nun ist $u'_x = \frac{x'}{t'}$, also auch $x' = u'_x\,t'$. Damit folgt weiter:

$$u_x = \frac{x' + \beta c t'}{t' + \frac{\beta}{c}\,x'} = \frac{u'_x t' + \beta c t'}{t' + \frac{\beta}{c}\,u'_x t'} = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}\,u'_x}$$

   Im Schlussresultat möchten wir kein β, sondern ausschließlich v stehen haben. Das ist einfach zu bewerkstelligen, denn $\beta = \frac{v}{c}$ oder $\beta c = v$, womit folgt:

$$u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}\,u'_x} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}}$$

   Damit haben wir u_x wie gefordert durch u'_x und v dargestellt – dass u'_y, u'_z und γ hier nicht auftreten, ist ja umso besser, denn dadurch wird der Ausdruck einfacher.
   Nun zu den anderen Geschwindigkeitskomponenten: Unter Verwendung der Lorentzrücktransformation, $x' = u'_x\,t'$, $y' = u'_y\,t'$ und $\beta = \frac{v}{c}$ leiten wir ganz ähnlich her:

$$u_y = \frac{y}{t} = \frac{y'}{\gamma\,(t' + \frac{\beta}{c}\,x')} = \frac{u'_y t'}{\gamma\,(t' + \frac{\beta}{c}\,u'_x t')} = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + \frac{\beta}{c}\,u'_x)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\,(1 + \frac{u'_x v}{c^2})}$$

   Auf genau dieselbe Weise entsteht der Ausdruck für die z-Komponente der Geschwindigkeit:

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\,(1 + \frac{u'_x v}{c^2})}$$

   Es ist interessant zu sehen, dass die Geschwindigkeitskomponenten u_y und u_z senkrecht zur Relativgeschwindigkeit nun doch von γ und vor allem von u'_x abhängen!

   (b) *Variante 2: Differentielles Rechnen*

   Wir setzen gleich die in der Aufgabenstellung unter iii. begonnene Herleitung des Ausdrucks für u_x fort. Vorab ist aber rasch zu bemerken, dass bezüglich der Ableitung nach t' die Parameter γ und β nur multiplikative Konstanten darstellen. Die in γ und β enthaltene Relativgeschwindigkeit v zwischen den beiden Bezugssystemen soll nämlich konstant sein! Sie verändert sich nicht mit fortschreitender Zeit t resp. t'. Damit folgt:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\big(\gamma(x' + \beta c t')\big)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\gamma\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)\Big)} = \frac{\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(x' + \beta c t')}{\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}(x' + \beta c t')}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)} \\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + \beta c}{1 + \frac{\beta}{c}\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x} = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} \end{aligned}$$

   Das entspricht der unter (a) für u_x erhaltenen Lösung.

Auf ähnliche Weise finden wir für die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung:

$$u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\gamma\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)\Big)} = \frac{u'_y}{\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)}$$

$$= \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\beta}{c}\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x\right)} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}$$

Ganz identisch ergibt sich für die z-Komponente der Geschwindigkeit:

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)}$$

Auch die Lösungen für u_y und u_z entsprechen – zum Glück – denjenigen unter (a).

(c) *Übergang in die Geschwindigkeitsaddition der klassischen Mechanik*

Bei geringer Relativgeschwindigkeit $v \ll c$ ist $\gamma \approx 1$ und $\beta \approx 0$. Daraus folgt, dass der überall vorhandene Bruch $\frac{u'_x v}{c^2}$ auch in etwa gleich 0 ist, selbst wenn u'_x nicht besonders klein ist. Und somit erhalten wir für $v \ll c$:

$$u_x \approx \frac{u'_x + v}{1 + 0} = u'_x + v \qquad u_y \approx \frac{u'_y}{1\,(1+0)} \approx u'_y \qquad u_z \approx \frac{u'_z}{1\,(1+0)} \approx u'_z$$

Dies sind genau die Ausdrücke in der klassischen Geschwindigkeitstransformation.

2. • *Erste Rechenaufgaben zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

(a) Im Erdsystem S hat das System S' von Raumschiff A die Relativgeschwindigkeit $v = 0.8c$. Und das Raumschiff B hat im System S' von Raumschiff A die Geschwindigkeit $u' = 0.35c$.

Damit ergäbe sich gemäss der klassischen Geschwindigkeitsaddition im Erdsystem A für das Raumschiff B eine Geschwindigkeit von $u = u' + v = 0.35c + 0.8c = 1.15c$, also Überlichtgeschwindigkeit.

Relativistisch beträgt diese Geschwindigkeit hingegen:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{1.15c}{1 + \frac{0.35c \cdot 0.8c}{c^2}} = \frac{\frac{115}{100}}{1 + \frac{35}{100}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{\frac{115}{100}}{1 + \frac{28}{100}}\,c = \frac{\frac{115}{100}}{\frac{128}{100}}\,c = \frac{115}{128}\,c \approx 0.898c$$

(b) Nun ist $u' = -0.35c$. Sonst bleibt alles gleich. Mit der klassischen Geschwindigkeitsaddition folgt: $u = u' + v = -0.35c + 0.8c = 0.45c$. Und relativistisch erhalten wir:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} = \frac{0.45c}{1 + \frac{-0.35c \cdot 0.8c}{c^2}} = \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{35}{100}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{\frac{45}{100}}{1 - \frac{28}{100}}\,c = \frac{\frac{45}{100}}{\frac{72}{100}}\,c = \frac{45}{72}\,c = \frac{5}{8}\,c = 0.625c$$

(c) Die Erde bewegt sich aus der Sicht von Raumschiff A mit der Relativgeschwindigkeit $v = -0.8c$, währenddem Raumschiff C im Erdsystem die Geschwindigkeit $u = 0.5c$ aufweist. Klassisch hat somit Raumschiff C im System von A die Geschwindigkeit: $u' = u + v = 0.5c - 0.8c = -0.3c$. Klar: Raumschiff C fliegt aus Sicht von A in die negative Richtung, denn A fliegt aus Sicht der Erde schneller in die positive Richtung als C. Relativistisch folgt für den Wert dieser Geschwindigkeit:

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} = \frac{-0.3c}{1 + \frac{0.5c\cdot(-0.8c)}{c^2}} = \frac{-\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}\,c = \frac{-\frac{3}{10}}{1 - \frac{4}{10}}\,c = \frac{-\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}\,c = -\frac{3}{6}\,c = -\frac{1}{2}\,c = -0.5c$$

Fliegt das Raumschiff B (System S'') von C aus gesehen in die positive Richtung, so hat die Erde relativ zu B klassisch eine Geschwindigkeit von $-1.15c$ (vgl. (a)). Somit folgt klassisch für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S'':

$$u'' = u + v = 0.5c - \frac{115}{100}\,c = \frac{50-115}{100}\,c = -\frac{65}{100}\,c = -\frac{13}{20}\,c = -0.65c$$

Rechnen wir hingegen korrekt, also relativistisch, so hat die Erde relativ zu Raumschiff B eine Geschwindigkeit von $v = -\frac{115}{128}\,c$ (vgl. (a)). Damit folgt für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S'':

$$u'' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{0.5 - \frac{115}{128}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{115}{128}}\,c = \frac{\frac{64-115}{128}}{1-\frac{115}{256}}\,c = \frac{-\frac{51}{128}}{\frac{141}{256}}\,c = \frac{-\frac{102}{256}}{\frac{141}{256}}\,c = -\frac{102}{141}\,c = -\frac{34}{47}\,c \approx -0.723c$$

Fliegt das Raumschiff B (System S''') von C aus gesehen hingegen in die negative Richtung, so hat die Erde relativ zu B klassisch eine Geschwindigkeit von $v = -0.45c$. Somit ergibt sich klassisch für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S''':

$$u''' = u + v = 0.5c - 0.45\,c = 0.05\,c = \frac{1}{20}\,c$$

Relativistisch ergibt sich aber mit der Relativgeschwindigkeit von $v = -\frac{5}{8}\,c$ (vgl. (b)) für die Geschwindigkeit von Raumschiff C im System S''':

$$u''' = \frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}} = \frac{0.5 - \frac{5}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{8}}\,c = \frac{\frac{4-5}{8}}{1-\frac{5}{16}}\,c = \frac{-\frac{1}{8}}{1-\frac{5}{16}}\,c = \frac{-\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}}\,c = -\frac{2}{11}\,c \approx -0.182c$$

Das bedeutet, dass das Raumschiff C aus der Sicht von Raumschiff B gemäss der klassischen Mechanik aufholen würde, relativistisch korrekt hingegen vom Raumschiff B abgehängt wird.

3. • *Geschwindigkeitstransformation in drei Dimensionen*

In der Aufgabenstellung sollte korrekterweise noch gesagt werden, dass sich die beiden Bezugssysteme in Standardorientierung zueinander befinden.

Der Lorentzfaktor beträgt aufgrund der vorgegebenen Relativgeschwindigkeit:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Jetzt können wir einfach die Gleichungen der relativistischen Geschwindigkeitsaddition verwenden:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{0.8c + 0.5c}{1+\frac{0.8c\cdot 0.5c}{c^2}} = \frac{1.3c}{1.4} = \frac{13}{14}\,c \approx 0.929c = 929\,\%\cdot c$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} = \frac{0.5c}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{0.8c\cdot 0.5c}{c^2}\right)} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}\,c}{2\cdot 1.4} = \frac{\sqrt{3}}{5.6}\,c \approx 0.309c = 30.9\,\%\cdot c$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)} = \frac{0}{\frac{2}{\sqrt{3}}\left(1+\frac{0.8c\cdot 0.5c}{c^2}\right)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0.929c \\ 0.309c \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0.8c \\ 0.5c \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{u}\,'$$

Wir stellen zunächst fest, dass die z-Komponente der Geschwindigkeit auch im S-System den Wert 0 behält. Die x-Komponente ist im S-System erwartungsgemäss grösser als in S' (weil $v > 0$). Die y-Komponente ist hingegen kleiner geworden.

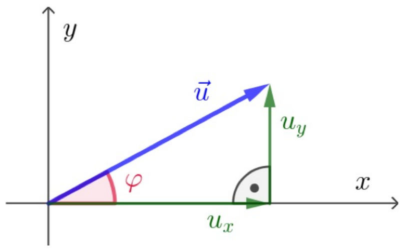
Für die Geschwindigkeitsbeträge erhalten wir in den beiden Systemen:

$$|\vec{u}\,'| = \sqrt{(0.8c)^2 + (0.5c)^2} = \sqrt{0.64 + 0.25}\,c = \sqrt{0.89}\,c \approx 0.943c = 94.3\,\% \cdot c$$

$$|\vec{u}\,| \approx \sqrt{(0.929c)^2 + (0.309c)^2} = \sqrt{0.929^2 + 0.309}\,c \approx 0.979c = 97.9\,\% \cdot c$$

Im S-System ist der Körper also – wieder gemäss unserer Erwartung – insgesamt schneller unterwegs.

Den Winkel zwischen der x-Achse und dem Geschwindigkeitsvektor können wir z.B. mit dem Arcustangens bestimmen:



$$\Rightarrow \quad \varphi' = \arctan\left(\frac{u_y'}{u_x'}\right) = \arctan\left(\frac{0.5c}{0.8c}\right) = \arctan\left(\frac{5}{8}\right) \approx 32.0°$$

$$\Rightarrow \quad \varphi = \arctan\left(\frac{u_y}{u_x}\right) \approx \arctan\left(\frac{0.309c}{0.929c}\right) \approx 18.4°$$

(Wäre die z-Komponente nicht gleich 0, so würden wir allenfalls mit dem Skalarprodukt arbeiten.)

Der Winkel zur x- resp. x'-Achse ist also deutlich enger geworden, und zwar aufgrund zweier Aspekte unserer Geschwindigkeitstransformation: Die x-Komponente der Geschwindigkeit ist in S grösser als in S' und die y-Komponente der Geschwindigkeit ist in S kleiner als in S'.

4. • *Weitere theoretische Überlegungen*

   (a) Gemäss Aufgabenstellung ist $u_x' = c$. Dann folgt:

   $$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c + v}{\frac{c+v}{c}} = \frac{(c + v)\,c}{c + v} = c$$

   Egal, wie gross also die Relativgeschwindigkeit der Systeme ist: Wenn sich ein Objekt in einem Bezugssystem mit der Geschwindigkeit v bewegt, dann auch in allen anderen! (Natürlich müssten wir das eigentlich auch noch für den allgemeinen Fall zeigen, bei dem die Geschwindigkeit $\vec{u}\,'$ nicht parallel zur x-Achse verläuft.)

   (b) Nun sei $v = c$. Das ist eigentlich von der Aussage her schon grenzwärtig, denn Bezugssysteme beziehen sich ja immer auf Objekte (mit Masse) und aus der Sicht eines solchen Objektes kann sich ein anderes eben gar nicht mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Das wird sofort klar, wenn wir versuchen den Lorentzfaktor γ zu berechnen. Das geht gar nicht. γ wird für $v \to c$ unendlich gross. Da γ in der x-Komponente des Additionstheorems aber nicht vorkommt, können wir zumindest da mal schauen, wie die Sache herauskäme:

   $$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} = \frac{u_x' + c}{1 + \frac{u_x' c}{c^2}} = \frac{u_x' + c}{1 + \frac{u_x'}{c}} = \frac{u_x' + c}{\frac{c+u_x'}{c}} = \frac{(u_x' + c)\,c}{c + u_x'} = c$$

   Offenbar würden sich in diesem Fall aus der Sicht von S einfach alle Objekte in S' mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Wir merken auch hier, dass dies offensichtlich etwas unsinnig ist.

5. ∘∘ *Relativistische Transformation von Beschleunigungen*

Wir setzen die in der Aufgabenstellung begonnene Transformationsherleitung für a_x fort, indem wir die Transformationsausdrücke für u_x und t einsetzen und nach t' ableiten:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\gamma\big(t'+\frac{\beta}{c}\,x'\big)\Big)} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right)}{\gamma\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(t'+\frac{\beta}{c}\,x'\Big)}$$

Diese Ableitungen geben nun schon ein bisschen was zu tun. Insbesondere müssen wir im Zähler die Quotientenregel anwenden:

$$a_x = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u'_x+v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right)}{\gamma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(t'+\frac{\beta}{c}\,x'\Big)} = \frac{\dfrac{\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'}\cdot\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)-(u'_x+v)\cdot\frac{v}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'}}{\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}}{\gamma\Big(1+\frac{\beta}{c}\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\Big)} = \frac{\dfrac{a'_x\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)-(u'_x+v)\,\frac{v}{c^2}\,a'_x}{\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}}{\gamma\Big(1+\frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x\Big)}$$

$$= \frac{\dfrac{a'_x\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}-\frac{u'_x v}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}\Big)}{\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}}{\gamma\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)} = \frac{a'_x\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)}{\gamma\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3} = \frac{a'_x\cdot\frac{1}{\gamma^2}}{\gamma\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3} = \frac{a'_x}{\gamma^3\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3}$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'} = a'_x$, dass $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = u'_x$ und dass schliesslich $1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$ ist.

Bei der weiteren Umformung nach der Ableitung hat sich der Term für a_x noch erstaunlich gut auf einen einigermassen kompakten Ausdruck reduzieren lassen. Bei a_y und a_z gelingt dies weniger:

$$a_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u'_y}{\gamma\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)}\right)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\gamma\big(t'+\frac{\beta}{c}\,x'\big)\Big)} = \frac{\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\left(\frac{u'_y}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}\right)}{\gamma\Big(1+\frac{\beta}{c}\,\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\Big)} = \frac{\dfrac{\frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'}\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)-u'_y\cdot\frac{v}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'}}{\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}}{\gamma^2\Big(1+\frac{\frac{v}{c}}{c}\,u'_x\Big)}$$

$$= \frac{\dfrac{a'_y\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)-\frac{u'_y v}{c^2}\,a'_x}{\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)} = \frac{a'_y\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)-\frac{u'_y v}{c^2}\,a'_x}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3} = \frac{a'_y}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}-\frac{\frac{u'_y v}{c^2}\,a'_x}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3}$$

Hier haben wir zusätzlich verwendet, dass $\frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'} = a'_y$.

Auf genau dieselbe Weise ergibt sich für die z-Komponente:

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^2}-\frac{\frac{u'_z v}{c^2}\,a'_x}{\gamma^2\Big(1+\frac{u'_x v}{c^2}\Big)^3}$$

Die Transformation einer Beschleunigung senkrecht zur Richtung der Relativbewegung (a'_y) hängt also auch von der Beschleunigung in Richtung der Relativbewegung ab (a'_x) – zudem auch von der Geschwindigkeit in Richtung der Relativbewegung (u'_x), sowie von der Geschwindigkeit in die Senkrechtrichtung (u'_y). Das ist doch sehr "nicht-klassisch", wenn wir daran denken, dass bei der Galilei-Transformation einfach gilt: $a_x = a'_x$, $a_y = a'_y$ und $a_z = a'_z$.

Halten wir an dieser Stelle noch ganz explizit fest, was wir gefunden haben:

Das relativistische Additionstheorem für Beschleunigungen

Betrachten wir zwei Bezugssysteme S und S' in Standardorientierung und bewegt sich S' aus Sicht von S mit der Relativgeschwindigkeit v in x-Richtung, so gilt für die Beschleunigungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{a}\,'$, die in den beiden System zur Bewegung eines bestimmten Körpers gehören:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3} \qquad a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{u'_y v}{c^2}\, a'_x}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{u'_z v}{c^2}\, a'_x}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3}$$

Diese Gleichungen bezeichnen wir als das **relativistische Additionstheorem für Beschleunigungen**. *Darin treten auch die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\vec{u}\,'$ auf.*

Für kleine Relativgeschwindigkeiten v geht dieses Additionstheorem über in die klassische Beschleunigungstransformation ($a_x = a'_x$, $a_y = a'_y$, $a_z = a'_z$).

Die letzte Aussage in obigem Kasten gilt es nun allerdings noch rasch zu verifizieren... Im Bereich kleiner Relativgeschwindigkeiten $v \ll c$ ist $\gamma \approx 1$ und $\frac{v}{c} \approx 0$. Damit folgt:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3} \approx \frac{a'_x}{1^3 \left(1+0\right)^3} = a_x \quad \checkmark$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^2} - \frac{\frac{u'_y v}{c^2}\, a'_x}{\gamma^2 \left(1 + \frac{u'_x v}{c^2}\right)^3} \approx \frac{a'_y}{1^2 \left(1+0\right)^2} - \frac{0 \cdot a'_x}{1^2 \left(1+0\right)^3} = a_y \quad \checkmark$$

Für a_z sieht es ganz genau gleich aus wie für a_y. Damit haben wir die relativistische Beschleunigungstransformation erfolgreich abgeschlossen, wobei man nun natürlich auch noch einige Rechenbeispiele durchexerzieren können.