Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

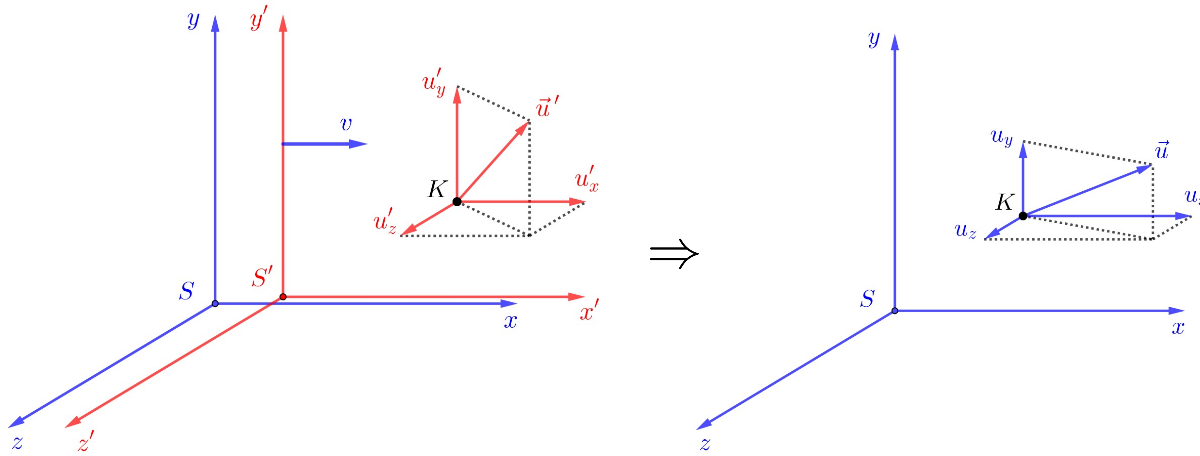
Serie 4: Geschwindigkeits- und Beschleunigungstransformation

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ◦ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ◦◦ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. •• *Die Herleitung der relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

S und S' seien zwei Bezugssysteme in Standardorientierung (Relativgeschwindigkeit v). Ein Körper K bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{u}$ in S resp. $\vec{u}\,'$ in S'::

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{u}\,' = \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Offensichtlich muss die x-Komponente u_x der Geschwindigkeit $\vec{u}$ im S-System eine andere sein als die x'-Komponente u'_x in S', denn S' bewegt sich ja in S längs der x-Achse. Aber auch die Geschwindigkeitskomponenten in die anderen beiden Raumrichtungen müssen sich relativistisch gesehen verändern, denn die Zeit in S' vergeht anders als die Zeit in S. Unsere Fragestellung lautet somit:

Wie berechnen sich, ausgehend von v, u'_x, u'_y und u'_z, die Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y und u_z, die die Bewegung des Körpers K im nicht-gestrichenen System S beschreiben?

Diese Frage wollen wir im Folgenden auf zwei verschiedene Varianten beantworten (und hoffen, dass wir dasselbe Resultat erhalten 😬).

Repetition/Vorüberlegung: Die Geschwindigkeitsaddition der klassischen Mechanik

In der klassischen Mechanik gilt die aus der Galilei-Transformation abgeleitete Geschwindigkeitsaddition:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}\,' \qquad \text{also} \qquad \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v + u'_x \\ u'_y \\ u'_z \end{pmatrix}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in die y- und die z-Richtung bleiben bei dieser klassischen Transformation gleich. In x-Richtung werden die beiden Geschwindigkeiten einfach addiert. Dies entspricht der Vorstellung von einer absoluten Zeit und von Geschwindigkeiten, die im Prinzip beliebig gross werden können. Beide Vorstellungen sind gemäss Relativitätstheorie falsch. Für die SRT braucht es also zwingend ein anderes Gesetz zur Addition von Geschwindigkeiten. Unser relativistisches Resultat muss allerdings für kleine Geschwindigkeitsbeträge v und u' in diese klassische Additionsvorschrift übergehen, denn diese gilt ja sehr wohl in unserer Alltagsphysik kleiner Geschwindigkeiten.

(a) *Variante 1: Rechnen mit Ereigniskoordinaten*

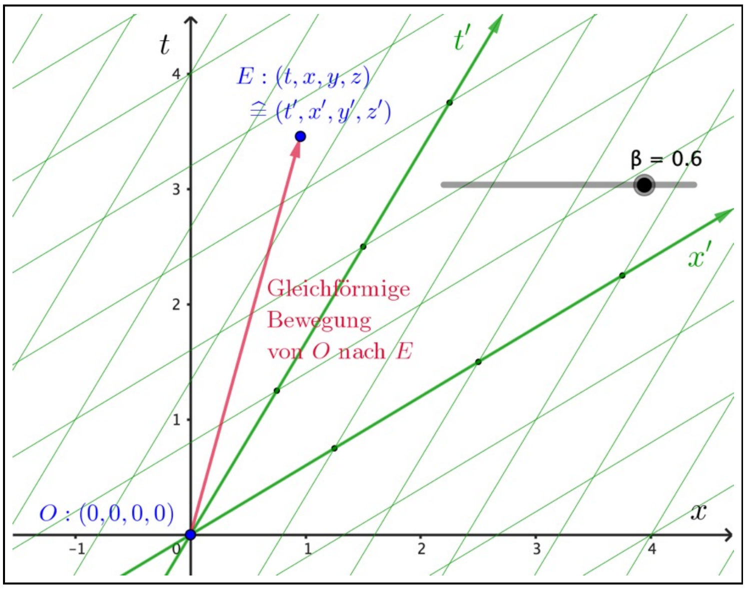
Der Körper K bewege sich geradlinig und mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag vom Ursprungsereignis O zum Ereignis E, das in der absoluten Zukunft liegen soll.

Anmerkung: Wenn diese Bewegung im einen Inertialsystem gleichförmig ist, dann auch im anderen, denn im Minkowski-Diagramm ist eine gerade Weltlinie in allen Bezugssystemen gerade.

Für die Koordinaten beider Ereignisse können wir schreiben:

$$O \text{ in } S \text{ und } S': \quad (0,0,0,0)$$

$$E \text{ in } S: \quad (t,x,y,z) \qquad\qquad E \text{ in } S': \quad (t',x',y',z')$$



Die Geschwindigkeit während dieser Bewegung wird in S durch den Vektor $\vec{u}$ und in S' durch den Vektor $\vec{u}\,'$ beschrieben. Wegen der gleichförmigen Bewegung können wir für die Komponenten dieser Geschwindigkeitsvektoren schreiben:

$$u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_E - x_O}{t_E - t_O} = \frac{x-0}{t-0} = \frac{x}{t}$$

$$\text{und ebenso:} \qquad u_y = \frac{y}{t} \qquad u_z = \frac{z}{t} \qquad u'_x = \frac{x'}{t'} \qquad u'_y = \frac{y'}{t'} \qquad u'_z = \frac{z'}{t'}$$

Gemäss unserer Fragestellung sollen vier Werte bekannt sein:

Gegeben: – Geschwindigkeit des S'-Systems im S-System (in x-Richtung): v

– Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers K im S'-System: u'_x, u'_y, u'_z

Da β und γ direkt von v abhängen, sind sie ebenfalls bekannt.

Gesucht: – Komponenten der Geschwindigkeit des Körpers K im S-System: u_x, u_y, u_z

Gib nun, unter Verwendung der Lorentz-Rücktransformation, je einen Ausdruck für u_x, u_y und u_z an, der von v, β, γ, u'_x, u'_y und u'_z abhängt. Vereinfache dein Resultat weitmöglichst.

(b) *Variante 2: Differentielles Rechnen*

Unsere zweite Lösungsvariante erscheint im ersten Moment vielleicht umständlicher, weil wir zunächst noch ein bisschen Theorie zum Thema Differentialrechnung betrachten und so quasi eine neue Technik lernen müssen. Die eigentliche Arbeit ist hinterher aber verhältnismässig rasch erledigt – und ausserdem lässt sich diese Technik dann auch gut in weiteren Situation anwenden. So werden wir damit z.B. auch die relativistische Beschleunigungstransformation in Aufgabe 5 bewerkstelligen.

Die Kettenregel und der praktische Nutzen der Leibniz-Schreibweise

Repetition der Kettenregel: Wir betrachten eine Funktion $u(x)$, die als eine verschachtelte Funktion $u(x) = u\big(v(x)\big)$ mit äusserer Funktion $u(v)$ und innerer Funktion $v(x)$ aufgefasst werden kann. Dann gilt für die Ableitung von u gemäss der **Kettenregel**:

$$u(x) = u\big(v(x)\big) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x)$$

Leibniz-Notation: Wie sieht diese Kettenregel in der Leibniz-Notation unter Verwendung infinitesimaler Schritte aus? Das ist nicht weiter schwierig:

$$u'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad u'(v) \equiv \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \qquad v'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad \Rightarrow \qquad \text{Kettenregel:} \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

Neues Verständnis: Zunächst lösen wir diese Leibniz'sche Kettenregel nach $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}$ auf:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}$$

Offenbar lässt sich die Ableitung der Funktion u nach v auch durch die Ableitungen von u und v nach einer anderen Variable x notieren. Die Leibniz-Schreibweise legt sogar nahe, dass man einen Ausdruck im Prinzip einfach mit einer infinitesimalen Grösse erweitern und danach die so entstandenen Ausdrücke neu interpretieren darf:

$$u'(v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\frac{1}{\mathrm{d}x}}{\frac{1}{\mathrm{d}x}} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

Oder anders: Mit den infinitesimalen Schritten $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ und $\mathrm{d}x$ darf man offenbar bis zu einem gewissen Grad genau so algebraisch rechnen, wie wir es uns von anderen Variablen oder Parametern gewohnt sind.

Fazit: Obige Gleichungen sagen uns, dass wir aufgrund der Kettenregel bei der Ableitung einer Funktion so etwas wie einen Ableitungswechsel vornehmen dürfen:[1] Sind u und v Funktionen einer gemeinsamen Variable x, so kann die Veränderung von u in Abhängigkeit von v auch durch die Veränderungen von u und v in Abhängigkeit von x ausgedrückt werden.

Diese mathematische Möglichkeit wollen wir nun benutzen, um aus der Lorentz-Transformation resp. -Rücktransformation direkt die relativistische Geschwindigkeitstransformation herzuleiten.

i. Zunächst bemerken wir: Die Koordinaten x, y, z und t eines Ereignisses E, festgehalten im S-System, können aufgrund der Lorentz-Rücktransformation als Funktionen der Koordinate t' dieses Ereignisses in S' verstanden werden:

$$x = \gamma(x + \beta ct) \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad ct = \gamma(ct' + \beta x') \quad \text{resp.} \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\right)$$

(y und z sind in diesem Sinne zunächst konstante Funktionen von t', aber das sind immer noch Funktionen.)

[1] Das erinnert ein wenig an die Basiswechsel-Formel bei Logarithmen: $\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$.

ii. Weiter denken wir: Die Weltlinie (= Punktmenge im Minkowski-Diagramm) eines Körpers K besteht aus einer Ereigniskette. Zu jedem Zeitpunkt t ist der Körper an einem bestimmten Ort (x, y, z). Wenn die Zeit t voranschreitet, väerndern sich x, y und z. Die Komponenten der momentanen Geschwindigkeit $\vec{u}$ sind in einem dieser Ereignisse E demnach gegeben durch:

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

Ganz analog gilt auch für die momentane Geschwindigkeit $\vec{u}\,'$ des Körpers K im Ereignis E aus der Sicht des Bezugssystems S':

$$u_x' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} \qquad u_y' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} \qquad u_z' = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}$$

iii. Jetzt verwenden wir unser neues Verständnis zur relativistisch korrekten Umrechnung der Geschwindigkeitskomponenten zwischen den Inertialsystemen S und S':

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\big(\gamma(x' + \beta c t')\big)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\gamma\big(t' + \frac{\beta}{c}\,x'\big)\Big)} = \ldots$$

Bearbeite nun diesen Ausdruck weiter, sodass u_x am Ende durch v und u_x' ausgedrückt wird, also die Geschwindigkeitstransformation für die x-Komponente dasteht.

Tipps: Es gilt zu berücksichtigen, dass die Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ zwischen den beiden Bezugssystemen eine Konstante ist. Das bedeutet, auch β und γ sind konstant, also nicht von t' abhängig. Ausserdem ist $\frac{\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t'} = 1$, $\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = u_x'$ und $\beta = \frac{v}{c}$.

Erarbeite anschliessend in gleicher Weise die Geschwindigkeitstransformationen für die y- und die z-Komponenten u_y und u_z.

(c) *Übergang in die Geschwindigkeitsaddition der klassischen Mechanik*

Erläutere, wie die unter (a) und (b) gefundenen relativistischen Ausdrücke in die klassische Geschwindigkeitsaddition übergehen, wenn die Beträge von $\vec{u}\,'$ und $\vec{v}$ klein sind.

Das Resultat soweit...

Aus Aufgabe 1 haben wir die folgenden Erkenntnisse gewonnen:

Das relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Betrachten wir zwei Bezugssyssteme S und S' in Standardorientierung und bewegt sich S' aus Sicht von S mit der Relativgeschwindigkeit v in x-Richtung, so gilt für die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{u}\,'$, die in den beiden System zur Bewegung eines bestimmten Körpers gehören:

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \qquad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)} \qquad u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{u_x' v}{c^2}\right)}$$

Diese Gleichungen bezeichnen wir als das **relativistische Additionstheorem für Geschwindigkeiten**. *Für kleine Geschwindigkeitsbeträge u resp. u' und v geht dieses Additionstheorem über in die klassische Geschwindigkeitstransformation.*

Ein Veranschaulichungsbeispiel mit dem Relativitätsexpress

Der Relativitätsexpress rase im Schienensystem S mit $60\,\%$ der Lichtgeschwindigkeit dahin ($v = \frac{3}{5}\,c$). Im Zuginnern, d.h. im Zugsystem S', ist die Minibar gerade mit halber Lichtgeschwindigkeit in Richtung Zugspitze unterwegs ($u'_x = \frac{1}{2}\,c$).

Mit welcher Geschwindigkeit ist die Minibar für einen Menschen unterwegs, der neben den Schienen steht und an dem der Zug vorbeirast?

Im S-System berechnen wir mit der Gleichung für die x-Komponente der Geschwindigkeit:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{u'_x v}{c^2}} = \frac{\frac{3}{5}\,c + \frac{1}{2}\,c}{1 + \frac{\frac{3}{5}\,c \cdot \frac{1}{2}\,c}{c^2}} = \frac{\frac{6+5}{10}\,c}{1 + \frac{3}{10}} = \frac{\frac{11}{10}\,c}{\frac{13}{10}} = \frac{11}{13}\,c \approx 84.6\,\% \text{ von } c$$

Klassisch hätte man für diese Geschwindigkeit $u_x = u'_x + v = \frac{11}{10}\,c = 110\,\%$ von c, also eine Überlichtgeschwindigkeit erwartet.

2. • *Erste Rechenaufgaben zur relativistischen Geschwindigkeitsaddition*

   Aus der Sicht eines Raumschiffs A bewegt sich ein anderes Raumschiff B mit 0.35-facher Lichtgeschwindigkeit, währenddem das Raumschiff A von der Erde aus selber mit 0.8-facher Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist. Beantworte die folgenden Fragen einmal gemäss der klassischen und einmal gemäss der relativistischen Mechanik.

   Wie gross ist im Erdsystem die Geschwindigkeit von Raumschiff B, wenn dieses

   (a) in dieselbe Richtung wie Raumschiff A fliegt?

   (b) in die genau entgegengesetzte Richtung wie Raumschiff A fliegt?

   (c) Ein Raumschiff C fliege von der Erde aus gesehen mit $0.5c$ in dieselbe Richtung wie Raumschiff A. Welche Geschwindigkeit hat Raumschiff C aus der Sicht der beiden anderen Raumschiffe?

3. • *Geschwindigkeitstransformation in drei Dimensionen*

   Berechne den Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}$ eines Körpers, der sich im S'-System mit dem Geschwindigkeitsvektor

   $$\vec{u}\,' = \begin{pmatrix} 0.8c \\ 0.5c \\ 0 \end{pmatrix}$$

   bewegt, wenn die Relativgeschwindigkeit der Systeme $v = 0.5c$ beträgt.

   Beantworte weiter:

   – Welche Geschwindigkeitsbeträge hat der Körper in den beiden Systemen?

   – Mit welchem Winkel relativ zur x-Achse bewegt sich der Körper in den beiden Systemen?

4. • *Weitere theoretische Überlegungen*

   Die Behauptung steht im Raum: *"Durch Addition von Geschwindigkeiten kann die Lichtgeschwindigkeit nie überschritten werden. Die Lichtgeschwindigkeit ist die höchstmögliche Geschwindigkeit im Universum."*

   (a) Ein Lichtstrahl ist im System S' mit der Geschwindigkeit c in x'-Richtung unterwegs.
   Wie gross ist seine Geschwindigkeit im S-System bei beliebiger Relativgeschwindigkeit $0 < v < c$?

   (b) Was passiert bei der Geschwindigkeitsaddition in drei Dimensionen, wenn das System S' relativ zu S mit Lichtgeschwindigkeit in x-Richtung unterwegs ist?

5. ∘∘ *Relativistische Transformation von Beschleunigungen*

In der klassischen Mechanik sind Beschleunigungen invariant unter der Galilei-Transformation. Beschleunigt ein Körper, so hat diese Beschleunigung in allen Inertialsystemen denselben Betrag und dieselbe Richtung, wenn diese Bezugssysteme standardorientiert zueinander liegen (parallele Achsen).

Das sieht nach der relativistischen Korrektur anders aus. Beschleunigungen transformieren bei hohen Körper- und Relativgeschwindigkeiten wesentlich anders!

In dieser Aufgabe kannst du selber die Transformationsgleichungen für die Komponenten der Beschleunigungen $\vec{a}$ und $\vec{a}\,'$ ermitteln. Dazu verwendest du unsere in Aufgabe 1.(b) neu kennengelernte Differentialtechnik. Hier ein paar Hinweise:

- Die Beschleunigungskomponenten sind die zeitlichen Ableitungen der zugehörigen momentanen Geschwindigkeitskomponenten im jeweiligen Bezugssystem, also:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\,, \quad a_y = \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\,, \quad a_z = \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\,, \qquad \text{und} \qquad a'_x = \frac{\mathrm{d}u'_x}{\mathrm{d}t'}\,, \quad a'_y = \frac{\mathrm{d}u'_y}{\mathrm{d}t'}\,, \quad a'_z = \frac{\mathrm{d}u'_z}{\mathrm{d}t'}$$

- Mit der Leibniz-Notation starten wir die Bestimmung einer Beschleunigungskomponente im System S beispielsweise so:

$$a_x = \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t'}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\dots\Big)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'}\Big(\dots\Big)}$$

- Nun müssen wir für u_x, u_y und u_z natürlich die in Aufgabe 1 erhaltenen Ausdrücke für die relativistische Geschwindigkeitstransformation verwenden.
- Am Ende müssen für a_x, a_y und a_z Ausdrücke herauskommen, die nun von v, u'_x, u'_y, u'_z und a'_x, a'_y und a'_z abhängen dürfen/sollen/müssen.
- **Achtung!** Gerade die Ausdrücke für a_y und a_z erheben nicht den Anspruch, besonders kompakt zusammengefasst werden zu können oder "schön" zu sein. In anderen Worten: Sie sehen algebraisch recht hässlich aus...
- **Überprüfung:** Diese Ausdrücke für a_x, a_y und a_z müssen im Limes kleiner Geschwindigkeiten in die klassische Beschleunigungstransformation übergehen. In diesem Grenzfall muss also gelten:

$$a_x \approx a'_x \qquad a_y \approx a'_y \qquad a_z \approx a'_z$$