Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 6: Die Summenschreibweise komplexer Zahlen – LÖSUNGEN

1. • *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

   Mit $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 8\mathrm{i}$ ergeben die sechs Rechnungen:

   i. $z_1 - 4z_2 + z_3 = 3 - 4\mathrm{i} - 4(2+) + 8\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i} - 8 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i} = -5 + 0\mathrm{i} = -5$

   ii. $$2z_2 - (8z_2 + \mathrm{i}z_3) = 2(2+\mathrm{i}) - \big(8(2+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(8\mathrm{i})\big) = 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2) = \\ = 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} - 8) = 4 + 2\mathrm{i} - 16 - 8\mathrm{i} + 8 = -4 - 6\mathrm{i}$$

   iii. $$z_1 z_2 z_3 = (3 - 4\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 4) \cdot 8\mathrm{i} \\ = (10 - 5\mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = 80\mathrm{i} - 40\mathrm{i}^2 = 40 + 80\mathrm{i}$$

   iv. $$z_1^2 + z_2^2 = (3 - 4\mathrm{i})^2 + (2 + \mathrm{i})^2 = 9 - 24\mathrm{i} + 16\mathrm{i}^2 + 4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 \\ = 9 - 24\mathrm{i} - 16 + 4 + 4\mathrm{i} - 1 = -4 - 20\mathrm{i}$$

   v. $\mathrm{Re}(z_1 + z_3) = \mathrm{Re}(3 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(3 + 4\mathrm{i}) = 3$

   vi. $\mathrm{Im}(z_2 z_3) = \mathrm{Im}\big((2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i}\big) = \mathrm{Im}\big(16\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2\big) = \mathrm{Im}(16\mathrm{i} - 8) = 16$

2. • *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

   (a) $z_1 = 2 + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_1^* = 2 - \mathrm{i} \qquad |z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad z_1^{-1} = \dfrac{z_1^*}{|z_1|^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i}$

   (b) $z_2 = 4 - 3\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_2^* = 4 + 3\mathrm{i} \qquad |z_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \qquad z_2^{-1} = \dfrac{z_2^*}{|z_2|^2} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}\,\mathrm{i}$

   (c) $z_3 = -24 + 7\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_3^* = -24 - 7\mathrm{i} \qquad |z_3| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \qquad z_3^{-1} = \dfrac{z_3^*}{|z_3|^2} = -\dfrac{24}{625} - \dfrac{7}{625}\,\mathrm{i}$

3. •• *Division komplexer Zahlen*

   (a) $$\frac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \frac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \cdot \frac{1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \frac{13 + 13\mathrm{i} - 5\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2}{1 - \mathrm{i}^2} = \frac{13 + 8\mathrm{i} + 5}{1 + 1} = \frac{18 + 8\mathrm{i}}{2} = 9 + 4\mathrm{i}$$

   (b) $$\frac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}} \cdot \frac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}} = \frac{4 - 2\mathrm{i} - \frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{15}{4} - 2\mathrm{i}}{\frac{17}{4}} = \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{17} - 2 \cdot \frac{4}{17}\,\mathrm{i} = \frac{15}{17} - \frac{8}{17}\,\mathrm{i}$$

   (c) $$\frac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \frac{4i}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} \cdot \frac{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \frac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 4\sqrt{5}\,\mathrm{i}^2}{3 - 5\mathrm{i}^2} = \frac{4\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$$

4. •• *Der Identifikationstrick*

i. Mit der Summenschreibweise $z = x + \mathrm{i}y$ erhalten wir durch ausmultiplizieren:

$$(-2+7\mathrm{i})z = -5+97\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad (-2+7\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = -5+97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x-2y\mathrm{i}+7x\mathrm{i}-7y = -5+97\mathrm{i}$$

ii. Wir sortieren links nach reellen und imaginären Gliedern:

$$-2x-7y+7x\mathrm{i}-2y\mathrm{i} = -5+97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x-7y+(7x-2y)\mathrm{i} = -5+97\mathrm{i}$$

iii. Jetzt lassen sich die Real- und die Imaginärteile links und rechts in der Gleichung je miteinander identifizieren und wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

$$\left| \begin{array}{c} -2x-7y=-5 \\ 7x-2y=97 \end{array} \right|$$

iv. Dieses Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Additionsverfahren lösen:

$$\left| \begin{array}{c} -2x-7y=-5 \\ 7x-2y=97 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -14x-49y=-35 \\ 14x-4y=194 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -53y=169 \quad \Leftrightarrow \quad y=-3$$

$$\Rightarrow \quad -2x-7\cdot(-3)=-5 \quad \Leftrightarrow \quad x=13 \quad \Rightarrow \quad z=13-3\mathrm{i}$$

Zur Überprüfung des Resultates können wir z.B. zurückeinsetzen:

$$(-2+7\mathrm{i})\cdot z = (-2+7\mathrm{i})\cdot(13-3\mathrm{i}) = -26+6\mathrm{i}+91\mathrm{i}+21 = -5+97\mathrm{i} \quad \checkmark$$

Andererseits sollten wir durch die effizientere Divisionsmethode auf dasselbe Resultat kommen:

$$\frac{-5+97\mathrm{i}}{-2+7\mathrm{i}}\cdot\frac{-2-7\mathrm{i}}{-2-7\mathrm{i}} = \frac{10+35\mathrm{i}-194\mathrm{i}+679}{4+49} = \frac{689-159\mathrm{i}}{53} = 13-3\mathrm{i} \quad \checkmark$$

5. ○ *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

(a) Wir benutzen die Ausmultiplikation mittels Binomialkoeffizienten (Pascal'sches Dreieck):

i. $(2-\mathrm{i})^4 = 2^4 - 4\cdot 2^3\cdot\mathrm{i} + 6\cdot 2^2\cdot\mathrm{i}^2 - 4\cdot 2\cdot\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 16-32\mathrm{i}-24+8\mathrm{i}+1 = -7-24\mathrm{i}$

ii. $\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = \mathrm{Re}\big((\mathrm{i}-1)^5\big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{i}^5 - 5\mathrm{i}^4 + 10\mathrm{i}^3 - 10\mathrm{i}^2 + 5\mathrm{i} - 1\big)$

Alle ungeraden Potenzen von i werden nichts zum Realteil beitragen, sodass wir schreiben können:

$$\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = -5\mathrm{i}^4 - 10\mathrm{i}^2 - 1 = -5+10-1 = 4$$

Ganz ähnlich verfahren wir bei der Bestimmung des Imaginärteils in iii., wobei jetzt die geraden Potenzen von i herausfallen:

iii. $$\mathrm{Im}\left(\left(2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^6\right) = \mathrm{Im}\left(2^6 - 6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + 15\cdot 2^4\cdot\frac{\mathrm{i}^2}{2^2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} + 15\cdot 2^2\cdot\frac{\mathrm{i}^4}{2^4} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5} + \frac{\mathrm{i}^6}{2^6}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^4\,\mathrm{i} - 20\,\mathrm{i}^3 - 3\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^3}\right) = \mathrm{Im}\left(-96\mathrm{i}+20\mathrm{i}-3\cdot\frac{\mathrm{i}}{8}\right) = -76\,\frac{3}{8}$$

(b) Grundsätzlich können wir immer $z = x + y\mathrm{i}$ resp. $z^* = x - y\mathrm{i}$ einsetzen und danach separat die Real- und die Imaginärteile beider Gleichungsseiten einander gleichsetzen. Dabei sind $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$:

i. $(1+2\mathrm{i})z = (5-\mathrm{i})z + 7 + 26\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (1+2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = (5-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) + 7 + 26\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} - 2y = 5x + 5y\mathrm{i} - x\mathrm{i} + y + 7 + 26\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x - 2y + (y+2x)\mathrm{i} = 5x + y + 7 + (-x+5y+26)\mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x - 2y = 5x + y + 7 \\ y + 2x = -x + 5y + 26 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 4x + 3y = -7 \\ 3x - 4y = 26 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16x + 12y = -28 \\ 9x - 12y = 78 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \quad 25x = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad 8 + 3y = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -15 \quad \Leftrightarrow \quad y = -5$

$\Rightarrow \quad z = x + yi = 2 - 5i$

ii. $(2+\mathrm{i})z - 3\mathrm{Re}(z) = -18 + 30\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (2+\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) - 3x = -18 + 30\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 2y\mathrm{i} + x\mathrm{i} - y - 3x = -18 + 30\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -x - y + (x+2y)\mathrm{i} = -18 + 30\mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -x - y = -18 \\ x + 2y = 30 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad y = 12 \quad \Rightarrow \quad x + 24 = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$$

$\Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 6 + 12\mathrm{i}$

iii. $z + 2\mathrm{i}z^* = 8 + 7\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2\mathrm{i}(x - y\mathrm{i}) = 8 + 7\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} + 2y = 8 + 7\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + (2x+y)\mathrm{i} = 8 + 7\mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x + 2y = 8 \\ -4x - 2y = -14 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -3x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

$\Rightarrow \quad 2 + 2y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$

iv. $\dfrac{z - 3\mathrm{i} - 3}{z + 2 + 4\mathrm{i}} = \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z - 3\mathrm{i} - 3 = \mathrm{i}(z + 2 + 4\mathrm{i}) = z\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 4$

$\Leftrightarrow \quad z - z\mathrm{i} = -1 + 5\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z(1-\mathrm{i}) = -1 + 5\mathrm{i}$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-1+5\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \cdot \frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}} = \frac{-1+5\mathrm{i}-\mathrm{i}-5}{1+1} = \frac{-6+4\mathrm{i}}{2} = -3 + 2\mathrm{i}$$

v. $\mathrm{Im}(z^* + 1) + \mathrm{i}\mathrm{Re}(-z+2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(x - y\mathrm{i} + 1) + \mathrm{i}\mathrm{Re}(-x - y\mathrm{i} + 2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -y + (-x+2)\mathrm{i} = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -y = -\frac{1}{2} \\ -x + 2 = -6 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 8 + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}$$

6. ∘∘ *Der kleinstmögliche Körper*

Mit den Definitionen für Addition und Multiplikation gehen wir ein Körperaxiom nach dem andern durch:

i. Assoziativität der Addition: Es gibt acht mögliche Fälle, denn $a, b, c \in \mathbb{K}$ können je entweder 0 oder 1 sein:

$$\begin{array}{lcl}
0+(0+0)=0+0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0+0)+0=0+0=0 \\
0+(0+1)=0+1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (0+0)+1=0+1=1 \\
0+(1+0)=0+1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (0+1)+0=1+0=1 \\
0+(1+1)=0+0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0+1)+1=1+1=0 \\
1+(0+0)=1+0=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1+0)+0=1+0=1 \\
1+(0+1)=1+1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1+0)+1=1+1=0 \\
1+(1+0)=1+1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1+1)+0=0+0=0 \\
1+(1+1)=1+0=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1+1)+1=0+1=1
\end{array}$$

ii. Kommutativität der Addition: Dies ist trivial, denn die Addition wird direkt sichtbar kommutativ definiert ($a + b = b + a$ gilt für jede Wahl von a und b).

iii. Nullelement: Offensichtlich ist dies die Zahl 0, denn $0 + 0 = 0$ und $1 + 0 = 1$.

iv. Negatives Element: Ja, zu jedem Element a des Körpers gibt es ein negatives Element $(-a)$, das zu a addiert das Nullelement 0 ergibt. Das negative Element (-0) zum Element 0 ist 0 selber, denn $0 + 0 = 0$. Das negative Element (-1) zum Element 1 ist 1 selber, denn $1 + 1 = 0$.

Beachte: Niemand hat gefordert, dass das negative Element $(-a)$ zu einem Element a nicht das Element a selber sein kann. Kein Körperaxiom widerspricht dieser Möglichkeit.

v. Assoziativität der Multiplikation: Auch hier gibt es acht mögliche Fälle, die im Prinzip alle überprüft werden müssen:

$$\begin{array}{lcl}
0\cdot(0\cdot0)=0\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot0)\cdot0=0\cdot0=0 \\
0\cdot(0\cdot1)=0\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot0)\cdot1=0\cdot1=0 \\
0\cdot(1\cdot0)=0\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot1)\cdot0=0\cdot0=0 \\
0\cdot(1\cdot1)=0\cdot1=0 & \text{ist dasselbe wie} & (0\cdot1)\cdot1=0\cdot1=0 \\
1\cdot(0\cdot0)=1\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot0)\cdot0=0\cdot0=0 \\
1\cdot(0\cdot1)=1\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot0)\cdot1=0\cdot1=0 \\
1\cdot(1\cdot0)=1\cdot0=0 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot1)\cdot0=1\cdot0=0 \\
1\cdot(1\cdot1)=1\cdot1=1 & \text{ist dasselbe wie} & (1\cdot1)\cdot1=0\cdot1=1
\end{array}$$

vi. Kommutativität der Multiplikation: Auch die Multiplikation ist direkt sichtbar für alle möglichen Fälle kommutativ definiert.

vii. Einselement: Die Zahl 1 ist das Einselement, denn $0 \cdot 1 = 0$ und $1 \cdot 1$.

viii. Inverses Element: Das inverse Element 1^{-1} zum Element 1 ist 1 selber, denn $1 \cdot 1 = 1$.

N.B.: Zum Nullelement 0 muss es kein Inverses geben! Das ist bestens, denn genau dies würde nicht klappen. Eine Zahl multipliziert mit 0 ist immer 0.

ix. Distributivität: Dies prüfen wir ebenfalls, indem wir alle acht möglichen Fälle einen nach dem andern durchgehen:

$$
\begin{array}{lcl}
0 \cdot (0+0) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (0+1) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+1) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 1) = 0 + 1 = 0 \\
1 \cdot (0+0) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1 \\
1 \cdot (1+0) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) = 1 + 0 = 1 \\
1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 0
\end{array}
$$

Tatsächlich haben wir nun alle Körperaxiome verifiziert. Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit der in der Aufgabenstellung deklarierten Addition und Multiplikation bildet demnach tatsächlich einen **Körper**, und zwar den kleinst möglichen!