Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 6: Die Summenschreibweise komplexer Zahlen

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ∘ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ∘∘ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. • *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

   Es seien $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 8\mathrm{i}$. Bestimme:

i. $z_1 - 4z_2 + z_3$	ii. $2z_2 - (8z_2 + \mathrm{i}z_3)$	iii. $z_1 z_2 z_3$
iv. $z_1^2 + z_2^2$	v. $\mathrm{Re}(z_1 + z_3)$	vi. $\mathrm{Im}(z_2 z_3)$

2. • *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

   Illustrierendes Beispiel: $z = 12 - 5\mathrm{i}$

   $$\Rightarrow \quad z^* = 12 + 5\mathrm{i} \qquad |z| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \qquad z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot \frac{z^*}{z^*} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{12}{169} + \frac{5}{169}\,\mathrm{i}$$

   Bemerke: $|z|^2 = z^* z$. Diese Idee erlaubt es bei einem Bruch zweier komplexer Zahlen den Nenner in eine reelle Zahl umzuwandeln. Es muss jeweils mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitert werden (= **"Divisions-Trick"**).

   Gib nun von den folgenden Zahlen je z^*, $|z|$ und z^{-1} an:

   (a) $z_1 = 2 + \mathrm{i}$ (b) $z_2 = 4 - 3\mathrm{i}$ (c) $z_3 = -24 + 7\mathrm{i}$

3. •• *Division komplexer Zahlen*

   Zur Division komplexer Zahlen verwenden wir den eben gesehenen Divisions-Trick (mit dem konjugiert Komplexen des Nenners erweitern). Ein Beispiel:

   $$\frac{2 - \mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} = \frac{2 - \mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} \cdot \frac{3 + 4\mathrm{i}}{3 + 4\mathrm{i}} = \frac{6 + 8\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2}{3^2 + 4^2} = \frac{6 + 5\mathrm{i} + 4}{25} = \frac{10 + 5\mathrm{i}}{25} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\,\mathrm{i}$$

   Berechne in dieser Weise:

   (a) $\dfrac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}$ (b) $\dfrac{2 - \frac{1}{2}\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\mathrm{i}}$ (c) $\dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}}$

4. •• *Der Identifikationstrick*

   Eben haben wir gesehen, wie sich die Division komplexer Zahlen effizient ausführen lässt (Divisions-Trick, also Erweiterung mit dem konjugiert Komplexen). Damit liesse sich auch die Gleichung

   $$(-2 + 7\mathrm{i}) \cdot z = -5 + 97\mathrm{i}$$

   nach Division durch $-2 + 7\mathrm{i}$ rasch lösen. Löse diese Gleichung nun aber nach folgendem Vorgehen:

   i. Notiere links z in der Summenschreibweise $x + \mathrm{i}y$ und multipliziere dann distributiv aus.
   ii. Sortiere links nach Gliedern mit i und solchen ohne.

iii. Nun kommt der Hauptschritt mit dem entscheidenden Gedanken: **Jede komplexe Zahl besteht aus einem eindeutigen Real- und einen eindeutigen Imaginärteil.**

Soll unsere Gleichung wahr sein, so muss die komplexe Zahl links den genau gleichen Realteil haben wie diejenige rechts. Ebenso müssen die Imaginärteile übereinstimmen. Durch **Identifikation** der Real- und der Imaginärteile (d.h. Gleichsetzen) erhalten wir ein Gleichungssystem für x und y:

$$\left| \begin{array}{l} \ldots = -5 \\ \ldots = 97 \end{array} \right|$$

Das funktioniert natürlich nur, weil x und y selber reelle Zahlen sind.

iv. Löse dieses Gleichungssystem auf und notiere die Lösung $z = \ldots$.

Natürlich kannst du deine Lösung durch Zurückeinsetzen in die Anfangsgleichung überprüfen.

5. ○ *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

(a) Berechne:

i. $(2-\mathrm{i})^4$ ii. $\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big)$ iii. $\mathrm{Im}\left(\left(2-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^6\right)$

(b) Löse die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

i. $(1+2\mathrm{i})z = (5-\mathrm{i})z + 7 + 26\mathrm{i}$

ii. $(2+\mathrm{i})z - 3\mathrm{Re}(z) = -18 + 30\mathrm{i}$

iii. $z + 2\mathrm{i}z^* = 8 + 7\mathrm{i}$

iv. $\dfrac{z - 3\mathrm{i} - 3}{z + 2 + 4\mathrm{i}} = \mathrm{i}$

v. $\mathrm{Im}(z^* + 1) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Re}(-z + 2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

Tipp: Verwende bei Bedarf den Ansatz $z = x + y\mathrm{i}$ und bestimme so x und y separat.

6. ○○ *Der kleinstmögliche Körper*

Gemäss der Definition eines Körpers im Skript zu den Komplexen Zahlen auf Seite 5 muss jeder Körper mindestens zwei verschiedene Elemente enthalten, nämlich 0 und 1. Weniger geht nicht! Diese zwei essentiellen Neutralelemente – eines für die Addition, eines für die Multiplikation – müssen auf jeden Fall im Körper enthalten sein.

Frage: Kann die Menge $\{0, 1\}$ ohne Hinzufügen weiterer Elemente zu einem Körper gemacht werden?

Die Antwort lautet: Ja, wenn wir Addition und Multiplikation wie folgt für alle möglichen Fälle definieren:

Addition:	$0 + 0 := 0$	$0 + 1 := 1$	$1 + 0 := 1$	$1 + 1 := 0$
Multiplikation:	$0 \cdot 0 := 0$	$0 \cdot 1 := 0$	$1 \cdot 0 := 0$	$1 \cdot 1 := 1$

Zeige, dass $\{0, 1\}$ zusammen mit der so definierten Addition und Multiplikation tatsächlich einen Körper bildet. D.h., überprüfe die Gültigkeit der neun Körperaxiome für diesen kleinstmöglichen Körper.

Interessant ist insbesondere die Frage, was die negativen Elemente von 0 und 1 sind und was das inverse Element von 1 ist, was man also unter (-0), (-1) und 1^{-1} zu verstehen hat.