Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 7: Erste DGLs, em-Wellen und Fotoeffekt – LÖSUNGEN

1. • *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   Beim Integrieren ermitteln wir eine Stammfunktion, d.h., wir bestimmen die allgemeine Lösung zur linearen, inhomogenen DGL 1. Ordnung $F'(x) = f(x)$. Integrieren bedeutet eine solche DGL zu lösen!

   Bei den vier gegebenen Integralen erhalten wir:

$$\int_{-2}^{2} (1 - x^2/4)\,\mathrm{d}x = \left(x - \frac{x^3}{12}\right)\Big|_{-2}^{2} = 2 - \frac{8}{12} - \left(-2 - \frac{-8}{12}\right) = 2 - \frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = (-\cos x)\,\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^4 = \left(\frac{2}{3}\cdot x\sqrt{x}\right)\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\big(4\sqrt{4} - 0\sqrt{0}\,\big) = \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = (\sin x)\,\Big|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

   Das letzte Integral ergibt 0, weil die Cosinusfunktion zwischen 0 und π eine gleich grosse Fläche oberhalb wie unterhalb der x-Achse begrenzt.

2. • *Weitere lineare, inhomogene DGLs 1. Ordnung – diesmal nicht als Integrale*

   (a) **Aufgabe:** $F'(x) = 8x^3 + 1$ mit RB: $F(-1) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $F(x) = 2x^4 + x + C$.

   Erfüllung der RB: $F(-1) = 2\cdot(-1)^4 - 1 + C = 2 - 1 + C = 1 + C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = -1$.

   Eindeutige Lösung: $F(x) = 2x^4 + x - 1$.

   (b) **Aufgabe:** $F'(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit RB: $F(4) = \frac{8}{3}$.

   Allgemeine Lösung: $F(x) = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} + C$.

   Erfüllung der RB: $F(4) = \frac{2}{3}\cdot 4\sqrt{4} + C = \frac{2}{3}\cdot 8 + C = \frac{16}{3} + C \stackrel{!}{=} \frac{8}{3} \Rightarrow C = -\frac{8}{3}$.

   Eindeutige Lösung: $f(x) = \frac{2}{3}\,x\sqrt{x} - \frac{8}{3}$.

   (c) **Aufgabe:** $F'(x) = \frac{1}{x}$ mit RB: $F(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Allgemeine Lösung: $F(x) = \ln|x| + C$.

   Erfüllung der RB: $F(-\frac{1}{e^2}) = \ln\big(|-\frac{1}{e^2}|\big) + C = \ln\frac{1}{e^2} + C = \ln e^{-2} + C = -2 + C \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = 2$.

   Eindeutige Lösung: $F(x) = \ln|x| + 2$.

   (d) **Aufgabe:** $F'(x) = 4\cos(2x)$ mit RB: $F(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Allgemeine Lösung: $F(x) = 2\sin(2x) + C$.

   Erfüllung der RB: $F(\frac{\pi}{8}) = 2\sin(2\cdot\frac{\pi}{8}) + C = 2\sin\frac{\pi}{4} + C = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + C = \sqrt{2} + C \stackrel{!}{=} 2\sqrt{2} \Rightarrow C = \sqrt{2}$.

   Eindeutige Lösung: $F(x) = 2\sin(2x) + \sqrt{2}$.

3. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

(a) • Aufgabe: $x^2 f''(x) - 2xf'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs: $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

Ableitungen: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$ und $f''(x) = 2a$.

Einsetzen: $x^2 \cdot 2a - 2x \cdot (2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = 6 \Leftrightarrow 2ax^2 - 4ax^2 - 2bx + 2ax^2 + 2bx + 2c = 6$
$\Leftrightarrow 2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$.

Allgemeine Lösung: $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

Erfüllung der RBs: $f(2) = 4a + 2b + 3 \overset{!}{=} 17$ und $f'(-1) = -2a + b \overset{!}{=} -1 \Rightarrow a = 2$ und $b = 3$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = 2x^2 + 3x + 3$.

(b) • Aufgabe: $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

Ableitungen: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\,e^{-4x} + B\,e^x \Rightarrow f'(x) = -4x - 3 - 4A\,e^{-4x} + B\,e^x$
$\Rightarrow f''(x) = -4 + 16A\,e^{-4x} + B\,e^x$.

Einsetzen: $-4+16Ae^{-4x}+Be^x = -3(-4x-3-4Ae^{-4x}+Be^x)+4(-2x^2-3x-\frac{13}{4}+Ae^{-4x}+Be^x)+8x^2$
$\Leftrightarrow -4+16Ae^{-4x}+Be^x = 12x+9+12Ae^{-4x}-3Be^x-8x^2-12x-13+4Ae^{-4x}+4Be^x+8x^2$
$\Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Gleichung ist für alle x erfüllt!

Erfüllung der RBs: $f(0) = -\frac{13}{4} + A + B \overset{!}{=} 0$ und $f'(0) = -3 - 4A + B \overset{!}{=} 0 \Rightarrow A = \frac{1}{20}$ und $B = \frac{16}{5}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + \frac{1}{20}\,e^{-4x} + \frac{16}{5}\,e^x$.

(c) ○ Aufgabe: $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

Ableitung: $f(x) = A\,e^{\cos x} \Rightarrow f'(x) = A\,e^{\cos x} \cdot (-\sin x) = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$.

Einsetzen: $-\sin x \cdot A\,e^{\cos x} = -\sin x \cdot A\,e^{\cos x}$ stimmt immer.

Ansatz $f(x) = A\,e^{\cos x}$ entspricht somit bereits der allgemeinen Lösung.

Erfüllung der RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = -\sin\frac{\pi}{3} \cdot A\,e^{\cos\frac{\pi}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A\,e^{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3e}}{2} A \overset{!}{=} 1 \Rightarrow A = -\frac{2}{\sqrt{3e}}$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{3e}} \cdot e^{\cos x}$.

(d) ○ Aufgabe: $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

Ableitungen: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c} = \left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{\frac{1}{3}}$
$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2)$.

Einsetzen: $\frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (3x^4 + 6x^2) - \frac{x^2}{\sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5+2x^3+3c}^{\,2}} \cdot (x^2 + 2) = 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^4+6x^2}{3} - x^2(x^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ ist für alle x erfüllt.

Erfüllung der RB: $f(0) = \sqrt[3]{3c} \overset{!}{=} -3 \Leftrightarrow 3c = -27 \Leftrightarrow c = -9$.

Eindeutige Lösung: $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 - 27}$.

4. • *Das mathematische Verständnis klassischer elektromagnetischer Wellen – Teil I*

(a) Die Bedeutungen der vier Parameter sind:

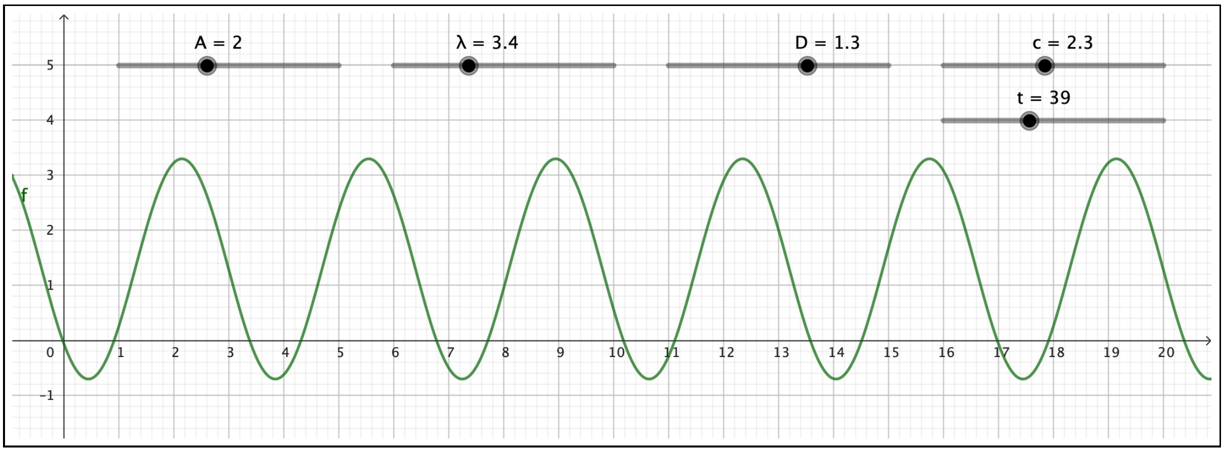
A = Vertikale Streckung: Der Parameter A gibt die vertikale Distanz zwischen der Mittellinie und einem Punkt des höchsten Ausschlags vor. Wir sprechen von der **Ausschlagsstärke** oder der **Amplitude**.

λ = Horizontale Streckung: Ohne physikalischen Bezug (also in der Mathematik) wird der Parameter λ als **Periode** bezeichnet. Er steht für die horizontale Länge des sich wiederholenden Auf-Ab-Musters – z.B. von einem Wellenberg bis zum nächsten. In unserem Kontext wird λ die **Wellenlänge** sein, also eine echte Strecke mit Längeneinheit.
Die unmodifizierte Sinusfunktion hat die Periode resp. Wellenlänge 2π, weil sie als y-Koordinate eines Punktes auf dem Einheitskreis definiert wird, den wir in Abhängigkeit des Zentriwinkels, der im Bogenmass angegeben wird, auf dem Einheitskreis herumläuft.

C = Horizontale Verschiebung: Der Parameter C lässt uns die Sinusfunktion horizontal verschieben. Dabei steht $C > 0$ für eine **Rechtsverschiebung**, wenn wir ein Minuszeichen in die Funktion einbauen, also eben $x - C$ notieren.

D = Vertikale Verschiebung: Mit dem Parameter D regeln wir die vertikale Mittellage der Welle.

(b) Hier das Aussehen eines möglichen GeoGebra-Files:



(c) Wir multiplizieren im Argument der Sinusfunktion aus und erhalten:

$$f(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi c}{\lambda}t\right)$$

Damit muss $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ und $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc$ sein. Ganz direkt folgt nun:

$$\omega = kc \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\omega}{k}$$

(d) Die Wellenbeziehung $c = \lambda \cdot f$ entsteht ganz automatisch, wenn wir uns überlegen, wie Wellen erzeugt werden. Aufgrund einer Anregungsfrequenz f werden Wellen ausgesendet. Pro Periode $T = \frac{1}{f}$ löst sich genau eine Wellenlänge λ vom Ort der Anregung ab. Beträgt die Wellengeschwindigkeit c, so folgt damit sofort:

$$\lambda = c \cdot T = \frac{c}{f} \quad \Rightarrow \quad c = \lambda \cdot f$$

Bemerke: f ist in der Folge nicht nur die Anregungsfrequenz, sondern natürlich ebenso die Frequenz, mit der Wellenberge oder Wellentäler an einer fixen Stelle x vorbeikommen, wenn die Welle unterwegs ist.

5. • *Das mathematische Verständnis klassischer elektromagnetischer Wellen – Teil II*

(a) Für die beiden zweifachen partiellen Ableitungen erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
& E_y(x,t) = E_0 \sin(kx - \omega t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big[E_0 \sin(kx-\omega t)\big] = E_0 \cos(kx-\omega t)\cdot k = kE_0\cos(kx-\omega t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\big[kE_0\cos(kx-\omega t)\big] \\
& \qquad = -kE_0 \sin(kx-\omega t)\cdot k = -k^2\cdot E_0\sin(kx-\omega t) = -k^2\cdot E_y(x,t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big[E_0 \sin(kx-\omega t)\big] = E_0\cos(kx-\omega t)\cdot(-\omega) = -\omega E_0\cos(kx-\omega t) \\
\Rightarrow \quad & \frac{\partial^2 E_y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\big[-\omega E_0\cos(kx-\omega t)\big] \\
& \qquad = \omega E_0\sin(kx-\omega t)\cdot -\omega = -\omega^2\cdot E_0\sin(kx-\omega t) = -\omega^2\cdot E_y(x,t)
\end{aligned}
$$

(b) Wir setzen unsere zweiten partiellen Ableitungen in die DGL ein und überzeugen uns so davon, dass unser Ansatz $E_y(x,t)$ die DGL erfüllt:

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} && |\,\text{2. Ableitungen einsetzen} \\
\Rightarrow \quad & -\omega^2\cdot E_y(x,t) = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot\big(-k^2\cdot E_y(x,t)\big) && |\,:\big(-E_y(x,t)\big) \\
\Leftrightarrow \quad & \omega^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}\cdot k^2 && |\,:k^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}
\end{aligned}
$$

Tatsächlich sind bei der Division durch $\big(-E_y(x,t)\big)$ beide Variablen ganz aus der DGL herausgefallen. Das bedeutet, die DGL ist für alle Orte x und für alle Zeitpunkte t erfüllt, sofern der nun dastehende Zusammenhang $\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0}$ gilt.

(c) Auf der linken Seite unseres Resultates steht genau das Quadrat der Wellengeschwindigkeit $c = \frac{\omega}{k}$. Somit muss gelten:

$$
c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}
$$

(d) Nun können wir die Werte für die magnetische Feldkonstante μ_0 und für die Dielektrizitätskonstante ε_0 einsetzen, um die Geschwindigkeit elektromagnetischer Wellen zu erhalten:

$$
c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}\cdot 8.854\cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}}} = 2.998\cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
$$

Das ist genau die uns wohlbekannte Lichtgeschwindigkeit! Genau diese Feststellung legte in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts die starke Vermutung nahe, dass es sich bei Licht um eine elektromagnetische Welle handelt.

6. ∘∘ *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

(a) Als Ansatz für die Differentialgleichung $N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$ muss wohl eine Exponentialfunktion gewählt werden, denn solche Funktionen bleiben beim Ableiten im Wesentlichen gleich.

In der Physik wählen wir in der Regel die Exponentialfunktion mit Basis e und setzen an:

$$N(t) = A \cdot e^{-\lambda t}$$

Der Faktor $-\lambda$ im Exponenten erzeugt ganz automatisch den Vorfaktor von $N(t)$ in der DGL.

Der Faktor A ist der frei wählbare Parameter, der in eine lineare und homogene DGL 1. Ordnung eingebaut werden muss, um alle möglichen Lösungen abzudecken. Wir sehen bei der Kontrolle sofort, dass dieses A für die Richtigkeit der DGL keine Rolle spielt:

$$N'(t) = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda \cdot A \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \cdot N(t) \quad \checkmark$$

(b) Die Anfangsbedingung lautet: $N(0) = N_0$. Daraus folgt sofort:

$$N(0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = A \cdot 1 = A \stackrel{!}{=} N_0 \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

(c) Lassen wir eine Halbwertzeit $T_{1/2}$ verstreichen, so muss sich die Anzahl noch vorhandener Kerne halbiert haben. Daraus folgt:

$$N(T_{1/2}) \stackrel{!}{=} \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad N_0 \cdot e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{N_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2}$$

Mit $\ln \frac{1}{2} = \ln 2^{-1} = -\ln 2$ ergibt sich:

$$-\lambda T_{1/2} = \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda T_{1/2} = -\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Tatsächlich ist die Zerfallskonstante λ umso kleiner, je grösser die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ist.

(d) Mit der neuen Basis $a = \frac{1}{2}$ soll die Exponentialfunktion zu jedem Zeitpunkt t immer noch denselben Wert liefern wie mit der Basis e. Es muss also gelten:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \stackrel{!}{=} N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{kt}$$

Dass der Vorfaktor N_0 bei beiden Basen immer noch derselbe sein muss, ergibt sich sofort aus der Bedingung $N(0) = N_0$. Nach Division durch N_0 und Logarithmieren mit $\ln(\ldots)$ auf beiden Gleichungsseiten erhalten wir:

$$-\lambda t = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{kt} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t = kt \cdot \ln \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda = k \cdot \ln \frac{1}{2}$$

Dass sich die Variable t rausgekürzt hat, ist die Bestätigung, dass wir jede Exponentialfunktion in einer beliebigen, positiven und von 1 verschiedenen Basis a notieren können.

Verwenden wir nun noch, dass $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$ und dass $\ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, so folgt:

$$-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} = -\ln 2 \cdot k \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{T_{1/2}} \quad \Rightarrow \quad N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

In dieser Notationsform des Zerfallsgesetzes kommt sehr direkt zum Ausdruck, dass für jede Halbwertzeit $T_{1/2}$, die in der verstrichenen Zeit t enthalten ist, einmal der Faktor $\frac{1}{2}$ auf die noch vorhandene Teilchenmenge angewendet wird. Auf Stufe Gymnasium ist es aufgrund dieser "mathematischen Klarheit" absolut sinnvoll, das Gesetz in dieser Form zu verwenden.

Ab Stufe Hochschule wird fast ausschliesslich die Basis e für Exponentialfunktionen verwendet. Den Grund dafür kennen wir nun. Die Basis e ist beim Ableiten und somit im Umgang mit Differentialgleichungen einfach viel praktischer, man könnte sagen "natürlicher".

Abschliessende Anmerkung zur vorliegenden Differentialgleichung $\boldsymbol{N'(t) = -\lambda \cdot N(t)}$:

Überall dort, wo die Veränderung einer Grösse, also $N'(t)$, proportional zur Grösse $N(t)$ selber ist, ergeben sich exponentielle Entwicklungen! Das gilt nicht nur für Abnahmen, sondern auch für das Wachstum. Hat man z.B. einen Betrag auf einem Sparkonto mit fixem Zinssatz und hebt nie etwas ab, dann wächst dieser Betrag exponentiell an, weil die Zunahme, also der Zins, proportional zum bereits vorhandenen Betrag ist. Analog können die Fallzahlen bei Epidemien eine Zeit lang exponentiell anwachsen, weil die Anzahl Neuansteckungen proportional zur Zahl der bereits infizierten Menschen ist.

7. • *Aufgaben rund um den Fotoeffekt*

(a) Wir multiplizieren das Planck'sche Wirkungsquantum h mit der Lichtgeschwindigkeit und erhalten:

$$hc = 6.626\,070\,015 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \cdot 299\,792\,458\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1.986\,446 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J \cdot m}$$

Darin wollen wir J durch eV und m durch nm ersetzen. Es gilt:

$$1\,\mathrm{eV} = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C \cdot V} = 1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$
$$\Rightarrow \quad 1\,\mathrm{J} = \frac{1\,\mathrm{eV}}{1.602\,176\,634 \cdot 10^{-19}} = 6.241\,509 \cdot 10^{18}\,\mathrm{eV}$$

Somit folgt für hc:

$$hc = 1.986\,446 \cdot 10^{-25} \cdot 6.241\,509 \cdot 10^{18}\,\mathrm{eV} \cdot 10^{9}\,\mathrm{nm} = 1239.842\,\mathrm{eV \cdot nm} \approx 124\underline{0}\,\mathrm{eV \cdot nm}$$

(b) Für die Photonenenergie ergibt sich:

$$E_\gamma = hf = h \cdot \frac{c}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda}$$

(c) Am besten ermitteln wir die Steigung aufgrund der gegebenen Punkte, bei Caesium z.B.:

$$m_{\mathrm{C}} = \frac{1.9\,\mathrm{eV}}{0.46\,\mathrm{PHz}} = \frac{1.9 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C \cdot V}}{0.46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{Hz}} = \frac{1.9 \cdot 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}}{0.46 \cdot 10^{15}\,\frac{1}{\mathrm{s}}} = 6.62 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J \cdot s} \approx h$$

Ganz analog erhalten wir Werte bei Magnesium und Zink. Es ist nicht zu erwarten, dass diese Werte ganz besonders genau den exakten Wert von h treffen, denn die Austrittsarbeit ϕ ist ja nur mit zwei signifikante Ziffern gegeben.

(d) Das einzelne Photon muss mindestens $4.3\,\mathrm{eV}$ Energie tragen. Unter Verwendung von $E_\gamma = \frac{hc}{\lambda}$ und $hc = 1240\,\mathrm{eV \cdot nm}$ ergibt sich für die maximale Wellenlänge sofort:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{1240\,\mathrm{eV \cdot nm}}{4.3\,\mathrm{eV}} = 288\,\mathrm{nm}$$

Diese Wellenlänge liegt im Ultravioletten. D.h. eben, bei Zink gibt es keine optischen Wellenlängen, die Elektronen herausschlagen könnten.

(e) i. Die Wellenlänge des Photons beträgt gemäss Aufgabenstellung $\lambda = 4.5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m} = 450\,\mathrm{nm}$. Daraus folgt für die Energie des Lichtteilchens:

$$E_\gamma = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\mathrm{eV \cdot nm}}{450\,\mathrm{nm}} = 2.756\,\mathrm{eV} \approx 2.8\,\mathrm{eV}$$

ii. Von diesem Wert ist die Austrittsarbeit zu subtrahieren, um die maximale kinetische Energie der herausgeschlagenen Elektronen zu erhalten. Letztere rechnen wir zuerst in eV um:

$$\phi = 2 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} = 2 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{\mathrm{eV}}{1.602 \cdot 10^{-19}} = 1.248\,\mathrm{eV}$$

Damit folgt für den gesuchten Energiewert:

$$E_{\text{kin,max}} = E_\gamma - \phi = 2.756\,\mathrm{eV} - 1.248\,\mathrm{eV} = 1.508\,\mathrm{eV} \approx 1.5\,\mathrm{eV}$$

(f) Die Austrittsarbeit von Wolfram beträgt $\phi = 4.5\,\mathrm{eV}$. Wenn wir wollen, dass der Fotostrom gerade ganz zum Erliegen kommt, dann muss die Bremspotential U_B genau so gross gewählt werden, dass der damit verbundene Umsatz an elektrischer Energie $\Delta E = U_\mathrm{B} \cdot e$ der maximal möglichen kinetischen Energie $E_{\text{kin,max}}$ entspricht. Letztere erhalten wir aus der Einstein'schen Beziehung zum Fotoeffekt:

$$E_{\text{kin,max}} = hf - \phi = \frac{hc}{\lambda} - \phi = \frac{1240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}}{150\,\mathrm{nm}} - 4.5\,\mathrm{eV} = 3.8\,\mathrm{eV}$$

Damit beträgt das Grenz-Bremspotential $3.8\,\mathrm{V}$.

(g) Die Energie eines Photons von $632.8\,\mathrm{nm}$ Wellenlänge beträgt:

$$E_\gamma = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\mathrm{eV} \cdot \mathrm{nm}}{632.8\,\mathrm{nm}} = 1.9595\,\mathrm{eV} = 3.1392 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$$

Pro Sekunde entsendet der Laser ein halbes Millijoule an Strahlungsenergie. Da wir die Energie des einzelnen Photons kennen, können wir die sekündliche Photonenzahl nun direkt berechnen:

$$N = \frac{\Delta E}{E_\gamma} = \frac{0.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{J}}{3.1392 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}} = 1.6 \cdot 10^{15}$$

Es werden also 1600 Billionen Photonen pro Sekunden emittiert!