Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 7: Erste DGLs, em-Wellen und Fotoeffekt

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ○ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ○○ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. • *Integrieren $\widehat{=}$ Lösen von linearen, inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung*

   In der Integralrechnung wird zur Ermittlung der Fläche unter einem Funktionsgraphen nach der **Stammfunktion** einer Funktion $f(x)$ gesucht. $F(x)$ ist die Funktion, die beim Ableiten wieder die Funktion $f(x)$ ergibt. Es gilt also:

   $$F'(x) = f(x)$$

   Dies ist eine **lineare, inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung** für die Funktion $F(x)$. Bei jeder Berechnung eines Integrals lösen wir also bereits eine Differentialgleichung!

   Berechne zur Vergegenwärtigung kurz die folgenden Integrale:

   $$\int_{-2}^{2} \left(1 - x^2/4\right) \mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{\pi} \sin x \, \mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{4} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x \qquad \int_{0}^{\pi} \cos x \, \mathrm{d}x$$

2. • *Weitere lineare, inhomogene DGLs 1. Ordnung – diesmal nicht als Integrale*

   In der Mathematik habt ihr – hoffentlich sehr bewusst – zur Kenntnis genommen, dass die Vorgabe einer Funktion $f(x)$ die zugehörige **Stammfunktion** $F(x)$ (mit $F'(x) = f(x)$) nur bis auf eine **Integrationskonstante** C festlegt, denn

   $$[F(x) + C]' = F'(x) + C' = F'(x) + 0 = f(x)$$

   $$\text{resp. als unbestimmtes Integral:} \quad F(x) = \int f(x) \, \mathrm{d}x + C$$

   Die lineare, inhomogene Differentialgleichung $F'(x) = f(x)$ hat also erstmal keine eindeutige Lösung $F(x)$. Erst durch eine zusätzliche Anforderung, die wir als **Anfangs**- oder **Randbedingung (RB)** bezeichnen, wird $F(x)$ vollends festgelegt.

   Beispiel: Differentialgleichung: $F'(x) = -4x^2$ mit Randbedingung: $F\big(\sqrt{3}\big) = 2\sqrt{3}$.
   Allgemeine Lsg. der DGL: $F(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + C$ denn so ist: $F'(x) = \left[-\frac{4}{3}\,x^3 + C\right]' = -4x^2$.
   Erfüllung der RB: $F\big(\sqrt{3}\big) = -\frac{4}{3}\big(\sqrt{3}\big)^3 + C = -4\sqrt{3} + C \overset{!}{=} 2\sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad C = 6\sqrt{3}$
   ⇒ eindeutige Lösung des Problems: $F(x) = -\frac{4}{3}\,x^3 + 6\sqrt{3}$

   Finde nun in gleicher Weise die eindeutigen Lösungen $F(x)$ zu den folgenden DGLs mit RBs und lasse dir ihre Graphen in **GeoGebra** aufzeichnen:

   (a) $F'(x) = 8x^3 + 1$ mit: $F(-1) = 0$.

   (b) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ mit: $F(4) = \frac{8}{3}$.

   (c) $F'(x) = \frac{1}{x}$ mit: $f(-\frac{1}{e^2}) = 0$.

   Bemerkung: Die Funktion $\ln x$ mit Ableitung $\frac{1}{x}$ erlaubt nur positive Werte von x. Allerdings können wir sie mittels dem Betrag von x auf den Bereich $x < 0$ erweitern: $\ln|x|$. Dabei bleibt die Ableitung $\frac{1}{x}$ genau gleich, erhält also keine Betragsstriche.

   (d) $f'(x) = 4\cos(2x)$ mit: $f(\frac{\pi}{8}) = 2\sqrt{2}$.

   Achtung! Berücksichtige, dass bei der Ableitung von $\sin(2x)$ oder $\cos(2x)$ aufgrund der Kettenregel eine innere Ableitung als zusätzlicher Faktor entsteht.

3. *Differentialgleichungen mit gegebenem Funktionsansatz zu Ende lösen*

   Bei den folgenden Aufgaben sollst du jeweils verifizieren, dass der gegebene **Funktionsansatz** die Differentialgleichung erfüllt.

   "Erfüllen" bedeutet, dass sich nach dem Einsetzen von $f(x)$, $f'(x)$, etc. in die DGL alle Glieder mit Variable x vollständig aus der Gleichung herausstreichen lassen. Dadurch ist gezeigt, dass die durch die DGL beschriebene Beziehung tatsächlich an jeder beliebigen Stelle x gültig ist. In aller Regel stimmt dies aber nur dann, wenn zwischen den anderen Parametern der DGL und des Funktionsansatzes bestimmte Beziehungen gelten.

   Erst durch zusätzliche **Randbedingung(en) (RBs)** werden schliesslich sämtliche im Funktionsansatz enthaltenen Parameter eindeutig festgelegt.

   Beispiel: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x)$ mit RB: $f(0) = 5$.

   Klassifizierung: Umstellung: $f'(x) + \frac{1}{3} \cdot f(x) = 0 \;\Rightarrow\;$ lineare, homogene DGL 1. Ordnung!

   Behauptung: Der Ansatz $f(x) = A \cdot e^{ax}$ erfüllt die DGL.

   Überprüfung: $f'(x) = A \cdot e^{ax} \cdot a$.

   Setze $f(x)$ und $f'(x)$ in die DGL ein: $f'(x) = -\frac{1}{3} \cdot f(x) \;\Rightarrow\; A \cdot e^{ax} \cdot a = -\frac{1}{3} \cdot A \cdot e^{ax}$.

   Exponentialterm e^{ax} und Vorfaktor A kürzen sich raus $\Rightarrow\; a = -\frac{1}{3}$. Sofern der Parameter a also dem Negativen des Faktors k in der ursprünglichen DGL entspricht, erfüllt unser Ansatz diese DGL. Die Variable x streicht sich raus. Das bedeutet, die DGL ist wirklich an jeder beliebigen Stelle x erfüllt.

   Allgemeine Lösung: Die allg. Lsg. der DGL lautet also $f(x) = A \cdot e^{-x/3}$. Sie enthält einen noch nicht bestimmten Parameter A, wie wir das von einer DGL 1. Ordnung erwarten.

   RB einsetzen: Die RB legt den Parameter A fest: $f(0) = A \cdot e^0 = A \stackrel{!}{=} 5$.

   Eindeutige Lösung: Somit lautet unsere eindeutige Lösung: $f(x) = 5\,e^{-x/3}$.

   Finde nun bei den folgenden DGLs jeweils aufgrund des gegebenen Funktionsansatzes und der Randbedingungen die **eindeutige Lösung**. **Klassifiziere** alle DGLs! Linear/nicht-linear? Homogen/inhomogen? Ordnung? (Vgl. DGL-Skript Seiten 1+2.)

   (a) • $x^2 f''(x) - 2x f'(x) + 2f(x) = 6$ mit RBs $f(2) = 17$ und $f'(-1) = -1$.

   Beh.: Mit dem Ansatz $f(x) = ax^2 + bx + c$ (quadratische Fkt.) lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   (b) • $f''(x) = -3f'(x) + 4f(x) + 8x^2$ mit RBs: $f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.

   Beh.: Mit $f(x) = -2x^2 - 3x - \frac{13}{4} + A\,e^{-4x} + B\,e^{x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   Die Aufgaben (c) und (d) sind für diejenigen gedacht, denen es gerade Spass macht und drum gerade noch mehr Aufgaben lösen möchten...

   (c) ∘ $f'(x) = -\sin x \cdot f(x)$ mit RB: $f'(\frac{\pi}{3}) = 1$.

   Beh.: Mit $f(x) = A\,e^{\cos x}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   (d) ∘ $f'(x) - \frac{x^2}{f^2(x)} \cdot (x^2 + 2) = 0$ mit RB: $f(0) = -3$.

   Beh.: Mit $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{5}x^5 + 2x^3 + 3c}$ lässt sich diese DGL eindeutig lösen.

   Hinweise: $f^2(x) := \big(f(x)\big)^2$. Und fürs Ableiten: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; [\sqrt[3]{x}\,]' = \frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

4. • *Das mathematische Verständnis klassischer elektromagnetischer Wellen – Teil I*

Im Theorietext *Klassische Elektrodynamik & elektromagnetische Wellen* wird gezeigt, wie wir uns eine **elektromagnetische Welle (em-Welle)** vorstellen. Mathematisch ist sie eine Lösung der **Maxwell-Gleichungen** für das Vakuum (also im Raum ohne elektrische Ladungen oder Ströme). In dieser Aufgabe wollen wir diese Beschreibung genauer verstehen. Dabei repetieren wir erstens die Mathematik von **Sinusfunktionen** und zweitens das physikalische Wissen über **Wellen** und die damit verbundenen Grössen.

(a) Die **allgemeine Sinusfunktion** kann wie folgt notiert werden:

$$f(x) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - C)\right) + D \qquad \text{mit} \quad A, \lambda, C, D \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Wenn wir $A = 1$, $\lambda = 2\pi$, $C = 0$ und $D = 0$ einsetzen, erhalten wir die normale ($=$ unmodifizierte) Sinusfunktion $f(x) = \sin x$.

Wie modifizieren die vier Parameter A, λ, C und D den Graphen dieser normalen Sinusfunktion? Welche geometrischen Auswirkungen haben sie auf ihn?

Tipp: Kreiere ein **GeoGebra**-File mit vier Schiebereglern für die vier Parameter und definiere damit die allgemeine Sinusfunktion. So kannst du nachher die Parameter variieren und direkt sehen, welche graphischen Konsequenzen dies hat.

(b) In der Physik treten Sinusfunktionen auf, wenn wir Wellen beschreiben. Dann bezeichnen wir A als **Amplitude** und λ als **Wellenlänge**. Wenn wir den Parameter C linear von der **Zeit** t abhängen lassen, also $C = c \cdot t$, so erhalten wir eine gleichförmig mit der **Geschwindigkeit** c nach rechts laufende Welle. Den Parameter D brauchen wir in aller Regel nicht und setzen ihn gleich 0:

$$f(x,t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) \tag{2}$$

Diese Funktion ordnet jeder Stelle x zu jedem Zeitpunkt t einen Funktionswert $f(x,t)$ zu.

Baue einen weiteren Schieberegler t in dein GeoGebra-File ein, sodass du die Sinuskurve mit einer bestimmten Geschwindigkeit laufen lassen kannst.

(c) Nun ist uns obige Notationsweise für $f(x,t)$ zu umständlich. Vielmehr wollen wir schreiben:

$$f(x,t) = A \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{3}$$

i. Wie hängen die neuen Parameter Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω mit den bisherigen Parametern λ und c zusammen? $k = \ldots$? $\omega = \ldots$?

ii. Zeige, dass die Wellengeschwindigkeit durch $c = \frac{\omega}{k}$ gegeben ist.

(d) Für sämtliche Arten von Wellen gilt die von uns als **Wellenbeziehung** bezeichnete Gleichung:

$$c = \lambda \cdot f \tag{4}$$

Auf agertsch.ch findet sich das Kapitel 8 aus dem Akustik-Skript. In den ersten beiden Abschnitten 8.1 und 8.2 wird dort beschrieben, woher diese Wellenbeziehung kommt.

Studiere diese Abschnitte, um dein Verständnis für die Wellenbeziehung aufzufrischen.

N.B.: Der Rest dieses Kapitels 8 enthält lauter Dinge, die für das Verständnis der Aufgaben (b) und (c) hier ganz nützlich sein könnten...

5. • *Das mathematische Verständnis klassischer elektromagnetischer Wellen – Teil II*

Nach den Ausführungen in Aufgabe 4 verstehen wir besser, weshalb ein elektrisches Feld, das durch

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y(x,t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{5}$$

gegeben ist, die elektrische Komponente der em-Welle beschreibt, wie sie auf Seite 3 im Text *Klassische Elektrodynamik & elektromagnetische Wellen* veranschaulicht wird: Wellenartig bewegt sich das elektrische Feld längs der x-Achse und schwingt dabei in y-Richtung.

Nun wollen wir dann noch nachvollziehen, dass die Sinusfunktion

$$E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t) \tag{6}$$

eine Lösung der **partiellen Differentialgleichung**

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \cdot \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} \tag{7}$$

ist. Da wir gerade Differentialgleichungen am kennenlernen sind, lohnt sich diese Betrachtung doppelt.

Partielle Ableitungen: Wie du siehst, stehen in Gleichung (7) keine "normalen" Ableitungen, wie z.B. $f'(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ oder $x'(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Vielmehr treffen wir stilisierte Ableitungs-d's, also ∂'s an. Damit werden offiziell sogenannte **partielle Ableitungen** gekennzeichnet. Solche partiellen Ableitungen treten automatisch auf, wenn eine Funktion von mehreren Variablen abhängt. Wir müssen dann nämlich jeweils angeben, nach welcher Variable wir die Funktion ableiten wollen.

Konkrete Anwendung am elektrischen Feld: In unserem Fall ist $E_y(x,t) = E_0 \cdot \sin(kx - \omega t)$ eine Funktion, die sowohl vom Ort x, als auch von der Zeit t abhängt. Sie lässt sich folglich nach x oder nach t ableiten. Zur Verdeutlichung zeige ich die partielle Ableitung nach dem Ort x vor:

$$\frac{\partial E_y(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big[E_0 \sin(kx - \omega t)\big] = E_0 \cos(kx - \omega t) \cdot k$$

Dabei ist $E_0 \cos(kx - \omega t)$ die äussere und k die innere Ableitung. Wir bemerken: Beim Ableiten nach x wird die Zeit t als konstanter Parameter angesehen.

(a) Bilde nun separat die beiden zweiten partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$, die in der partiellen DGL (7) auftreten.

(b) Setze deine Resultate aus (a) in (7) ein und zeige so, dass $E_y(x,t)$ diese partielle DGL erfüllt.

Zur Erinnerung: Die DGL zu erfüllen meint, dass sich die beiden Variablen x und t komplett aus der Gleichung herausstreichen. Das bedeutet nämlich, die Gleichung ist für jeden beliebigen Ort x und jeden beliebigen Zeitpunkt t korrekt resp. erfüllt – vorausgesetzt natürlich, dass der Zusammenhang, der bei dieser Rausstreichung von x und t übrig bleibt, gilt...

(c) Nachdem sich x und t herausgestrichen haben, bleibt eine Gleichung mit k, ω, ε_0 und μ_0 stehen, die stimmen muss, wenn die DGL erfüllt sein soll.

Verwende den in Aufgabe 4 entdeckten Zusammenhang $c = \frac{\omega}{k}$, um zu zeigen, wie die Wellengeschwindigkeit c mit den beiden Konstanten ε_0 und μ_0 zusammenhängt.

(d) Welcher Wert ergibt sich, wenn wir die beiden Konstantenwerte

$$\varepsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2} \qquad \text{und} \qquad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$$

in den unter (c) erhaltenen Ausdruck für c einsetzen?

6. ∘∘ *Radioaktive Zerfälle und Zerfallsgesetz*

Wir betrachten eine **radioaktive Quelle**, in der es zum Zeitpunkt $t = 0$ N_0 **Radionuklide** (= Atome mit instabilem Kern) einer bestimmten Sorte geben soll, z.B. C–14. Diese Radionuklide haben eine bestimmte **Halbwertzeit** $T_{1/2}$ – im Falle von C–14 sind es 5730 Jahre – in der für jedes einzelne Radionuklid eine Wahrscheinlichkeit von $50\,\%$ besteht, dass der Kern radioaktiv zerfällt.

Wie verändert sich die Anzahl **Radionuklide** in der Quelle über die Zeit? Wie lautet also die Funktion $N(t)$, die zu jedem Zeitpunkt t angibt, wie viele Radionuklide noch in der Quelle vorhanden sind?

Die Antwort kennt ihr bereits aus der Kernphysik. Es muss sich das exponentiell abfallende **Zerfallsgesetz** ergeben.

Vorüberlegungen: Zu irgendeinem Zeitpunkt t sind noch $N(t)$ Radionuklide vorhanden. Im darauf folgenden Zeitabschnitt Δt verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um ΔN. Dabei muss $\Delta N < 0$ sein, denn es handelt sich um eine Abnahme von N.

Für jeden einzelnen der $N(t)$ radioaktiven Kerne besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit innerhalb von Δt zu zerfallen, sodass die Gesamtzahl der tatsächlich innerhalb von Δt zerfallenden Kerne *proportional* zu $N(t)$ sein muss. Dieser Gedanke gilt auch – oder vielleicht insbesondere (!) – im Infinitesimalen. Im infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$ verändert sich die Anzahl noch vorhandener Radionuklide um $\mathrm{d}N$, wobei diese Veränderung *proportional* zu $N(t)$ sein muss. Somit erhalten wir eine infinitesimale Gleichung:

$$\mathrm{d}N = -\lambda \cdot N(t) \cdot \mathrm{d}t$$

Die sogenannte **Zerfallskonstante** λ muss als Mass für die **Zerfallswahrscheinlichkeit** des einzelnen Kerns interpretiert werden. Sie soll per Definition positiv sein: $\lambda > 0$. So verstehen wir auch das zusätzlich eingefügte Minuszeichen. Es sorgt dafür, dass $\mathrm{d}N$ negativ herauskommt (Abnahme!).

Die Differentialgleichung: Teilen wir obige Gleichung durch $\mathrm{d}t$, so folgt:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot N(t) \qquad \text{resp.} \qquad N'(t) = -\lambda \cdot N(t)$$

(a) Finde den allgemeinen Lösungsansatz $N(t) = \ldots$ für diese **Differentialgleichung**.

Achtung: Es handelt sich um eine normale Differentialgleichung 1. Ordnung. In die allgemeine Lösung muss folglich ein zusätzlicher Parameter C eingebaut werden.

Tipp: Einleitungsbeispiel in Aufgabe 3!

(b) Lege den Parameter C so fest, dass die Anfangsbedingung $N(0) = N_0$ erfüllt ist und notiere somit die Abnahmefunktion $N(t)$ der Radionuklide in unserer Quelle (Zerfallsgesetz).

(c) Zwischen der Zerfallskonstante λ und der Halbwertzeit $T_{1/2}$ muss es einen Zusammenhang geben, denn: Je grösser die Zerfallswahrscheinlichkeit ist, desto kleiner wird die Halbwertszeit sein müssen... Wie lautet der mathematisch exakte Zusammenhang zwischen λ und $T_{1/2}$?

(d) In der höheren Physik verwenden wir für Exponentialfunktionen in aller Regel die Basis e (= Euler'sche Zahl ≈ 2.718). Für ein besseres Verständnis ist die Wahl einer anderen Basis aber immer mal wieder hilfreich. Damit sage ich implizit: Eine Exponentialfunktion lässt sich im Prinzip mit jeder beliebigen Basis $a > 0$ (mit $a \neq 1$) notieren.

Formuliere das unter (c) erhaltene Zerfallsgesetz unter Verwendung der neuen Exponentialbasis $a = \frac{1}{2}$ und erläutere, weshalb der so entstehende Ausdruck für $N(t)$ etwas einfacher zu interpretieren ist.

7. • *Aufgaben rund um den Fotoeffekt*

   (a) Der Ausdruck hc taucht relativ häufig auf. In SI-Einheiten ist er oftmals etwas unpraktisch...
   Zeige, dass hc mit vier signifikanten Ziffern den Wert $1240\,\mathrm{eV}\cdot\mathrm{nm}$ aufweist.
   In Zukunft können wir für hc diesen Wert verwenden, wenn es gerade praktisch ist.

   (b) Notiere die Energie $E_\gamma = hf$ eines Photons unter Ausnutzung der Wellenbeziehung $c = \lambda f$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge λ. So siehst du, wo hc vor allem anzutreffen ist.

   (c) Zeige durch ablesen und berechnen, dass die Steigungen der drei Geraden im Diagramm auf Seite 5 im Theorietext zum Fotoeffekt gerade dem Planck'schen Wirkungsquantum h entsprechen.

   (d) Die Austrittsarbeit von Zink beträgt $\phi = 4.3\,\mathrm{eV}$. Welche Wellenlänge darf monochromatisches Licht maximal aufweisen, wenn es Elektronen aus einer Zinkplatte herausschlagen soll.
   Welche "Farbe" gehört zum Grenzfall?

   (e) Sichtbares Licht der Wellenlänge $450\,\mathrm{nm}$ trifft auf ein Stück Metall, wodurch Elektronen herausgeschlagen werden. Die Austrittsarbeit für dieses Metall beträgt $\phi = 2.0\cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

      i. Welche Energie hat das eingestrahlte Photon?
      ii. Wie gross ist die (maximale) kinetische Energie der emittierten Elektronen?

   (f) Wie gross ist das Grenz-Bremspotential, wenn Licht von $150\,\mathrm{nm}$ auf eine Wolframplatte trifft?

   (g) Einer unserer Schullaser (He-Ne-Laser) emittiert eine Strahlungsleistung von $0.50\,\mathrm{mW}$ bei einer Wellenlänge von $\lambda = 632.8\,\mathrm{nm}$.
   Wie viele Photonen verlassen den Laser pro Sekunde?