Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 8: Neue Wege mit dem Aktionsprinzip – LÖSUNGEN

1. • *Das einfachste Beispiel – der senkrechte Wurf*

   (a) Zunächst leiten wir den quadratischen Funktionsansatz zweimal ab:

   $$x(t) = At^2 + Bt + C \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = 2At + B \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = 2A$$

   Nun können wir den Ausdruck für $x''(t)$ in die DGL einsetzen. Es zeigt sich erstens, dass unser quadratischer Ansatz die DGL löst, denn es entsteht eine Gleichung, in der die Variable t nicht mehr auftritt. Zweitens wird klar, wie der Parameter A mit dem Ortsfaktor resp. der Fallbeschleunigung g zusammenhängt:

   $$x''(t) = -g \qquad \Rightarrow \qquad 2A = -g \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{g}{2}$$

   (b) Einerseits kennen wir den Ort zum Zeitpunkt $t = 0$, nämlich $x(0) = x_0 = 17\,\mathrm{m}$. Andererseits wissen wir, dass der tote Punkt zum Zeitpunkt $t_{\max} = 1.7\,\mathrm{s}$ erreicht wird. Im toten Punkt ist die Geschwindigkeit kurzzeitig gleich 0, also $x'(t_{\max}) = 0$. Somit haben wir zwei Gleichungen, aus denen sich die beiden Parameter B und C bestimmen lassen sollten:

   $$\left| \begin{array}{c} x(0) = x_0 \\ x'(t_{\max}) = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} C = x_0 \\ 2At_{\max} + B = 0 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \underline{C = x_0 = 17\,\mathrm{m}}$$

   $$\text{und} \quad B = -2At_{\max} = -2 \cdot \left(-\frac{g}{2}\right) \cdot t_{\max} = \underline{gt_{\max}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.7\,\mathrm{s} = \underline{17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}$$

   (c) Zunächst notieren wir die Ortsfunktion und ihre beiden Ableitungen neu – formal und numerisch:

   $$x(t) = At^2 + Bt + C = -\frac{g}{2}\,t^2 + gt_{\max}\,t + x_0 = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t^2 + 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot t + 17\,\mathrm{m}$$

   $$\Rightarrow \quad v(t) = x'(t) = 2At + B = -gt + gt_{\max} = -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot t + 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

   $$\Rightarrow \quad a(t) = x''(t) = 2A = -g = -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

   Aufgrund der Anfangsbedingung $x(0) = C = x_0$ ist sofort klar, dass der Parameter C direkt für die **Starthöhe** resp. den **Startort** x_0 steht, also für die $17\,\mathrm{m}$ Abwurfhöhe.
   Wenn wir zudem bewusst zur Kenntnis nehmen, dass $v(0) = x'(0) = B$ ist, so wird weiter klar, dass der Parameter B für die **Anfangsgeschwindigkeit** v_0 stehen muss.
   Wenn wir mit dieser Erkenntnis die Funktion $x(t)$ nochmals neu notieren, wird alles noch klarer:

   $$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t - \frac{g}{2}\,t^2$$

   Das ist die im Prinzip bereits aus der 1. Klasse bekannte Gleichung für den Auenthaltsort x zum Zeitpunkt t bei einer gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Beschleunigung $a = -g$. Der Startort ist x_0. Zu diesem wird eine lineare Veränderung $v_0 t$ aufgrund von v_0 und eine quadratische Veränderung $\frac{a}{2}t^2$ aufgrund von a hinzuaddiert.

   (d) Wir erhalten für die Maximalhöhe: $x(1.7\,\mathrm{s}) = -5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot (1.7\,\mathrm{s})^2 + 17\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 1.7\,\mathrm{s} + 17\,\mathrm{m} = 31.45\,\mathrm{m}$.

   Und für die Landung: $x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0 \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4(-\frac{g}{2})x_0}}{2(-\frac{g}{2})}$

   $\Leftrightarrow \quad t_{1/2} = \dfrac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gx_0}}{-g} \approx -0.81\,\mathrm{s}$ oder $\underline{4.21\,\mathrm{s}}$ (negative Lösung kommt nicht in Frage!)

   $\Rightarrow \quad v(4.21\,\mathrm{s}) = x'(4.21\,\mathrm{s}) \approx -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 4.21\,\mathrm{s} + 17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = -25.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2. *Dreierlei vom Abbremsen*

   (a) • *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

      i. Zuerst leiten wir den gegebenen Funktionsansatz zweimal ab:

$$x(t) = At^2 + Bt + C \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = 2At + B \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = 2A$$

      Soll die DGL stimmen so folgt:

$$x''(t) = 2A \stackrel{!}{=} -\frac{\alpha}{m} \qquad \Leftrightarrow \qquad A = -\frac{\alpha}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad x(t) = -\frac{\alpha}{2m}t^2 + Bt + C$$

      ii. Dies ist die allgemeine Lösung für die Bewegung eines Körpers mit Masse m bei konstanter Bremskraft $-\alpha$. Sie muss nun noch an die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = x'(0) = v_0$ angepasst werden, wodurch die beiden Parameter B und C festgelegt werden:

$$x(0) = C \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \qquad \text{und} \qquad x'(0) = B \stackrel{!}{=} v_0 \quad \Rightarrow \quad B = v_0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = -\frac{\alpha}{2m}\,t^2 + v_0 t \quad \Rightarrow \quad x'(t) = -\frac{\alpha}{m}\,t + v_0$$

      Das sind die altbekannten Bewegungsgleichung $x(t) = v_0 t + \frac{a}{2}t^2$ und $v(t) = v_0 + at$ zur gleichmässig beschleunigten Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit v_0 und Beschleunigung $a = -\frac{\alpha}{m}$.

      iii. Der Wagen hat fertig ausgerollt, wenn $v(t) = 0$ ist. Daraus folgt für die Zeit t_{end} bis zum Stillstand:

$$v(t_{\text{end}}) = v_0 - \frac{\alpha}{m} \cdot t_{\text{end}} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\alpha}$$

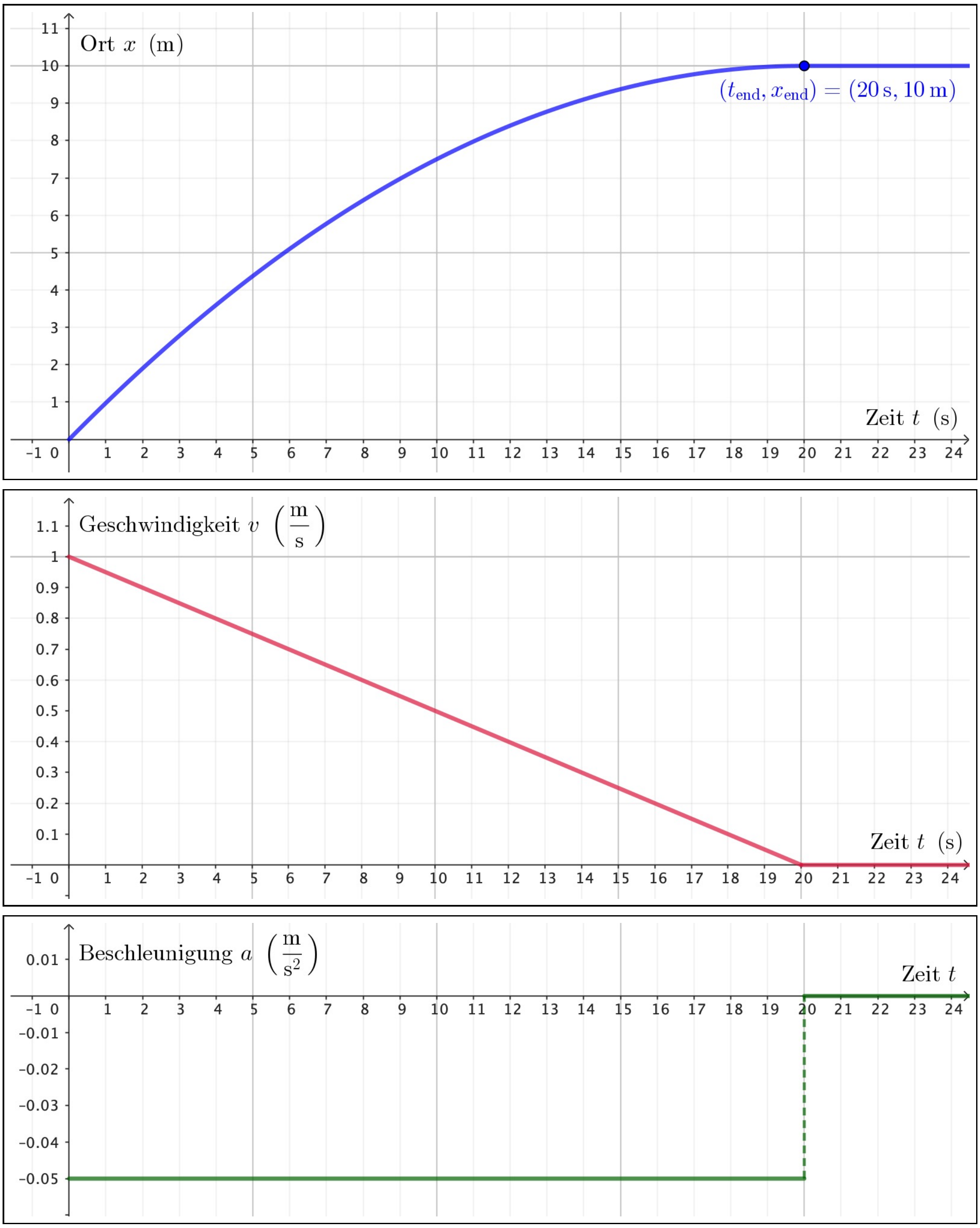
      Und somit ergibt sich für den Ort des Stillstandes resp. für die zurückgelegte Strecke:

$$x_{\text{end}} = x(t_{\text{end}}) = -\frac{\alpha}{2m}\left(\frac{v_0 m}{\alpha}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v_0 m}{\alpha} = -\frac{\alpha v_0^2 m^2}{2m\alpha^2} + \frac{v_0^2 m}{\alpha} = \frac{v_0^2 m}{\alpha} \cdot \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{v_0^2 m}{2\alpha}$$

      iv. Die zugehörigen Bewegungsdiagramme befinden sich oben auf der nächsten Seite.
      Für die Dauer der Bremsung und die Bremsstrecke erhalten wir:

$$t_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\alpha} = \frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2\,\mathrm{kg}}{0.1\,\mathrm{N}} = 20\,\mathrm{s}$$

$$x_{\text{end}} = \frac{v_0^2 m}{2\alpha} = \frac{\left(1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2 \cdot 2\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 0.1\,\mathrm{N}} = 10\,\mathrm{m}$$



(b) •• *Bremskraft proportional zu v (z.B. Wirbelstrombremse)*

i. Wieder starten wir mit dem Ableiten des Funktionsansatzes. Dabei gilt es die **Kettenregel** zu beachten! Aus $e^{-\lambda t}$ geht beim Ableiten ein zusätzlicher Faktor $-\lambda$ (= innere Ableitung) hervor:

$$x(t) = A + B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = -\lambda B\,e^{-\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad x''(t) = \lambda^2 B\,e^{-\lambda t}$$

Einsetzen in die DGL liefert:

$$-\beta \cdot x'(t) = m \cdot x''(t) \quad \Rightarrow \quad -\beta\,(-\lambda B)\,e^{-\lambda t} = m\,\lambda^2 B\,e^{-\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \beta = m\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\beta}{m}$$

Der Ansatz löst also diese lineare, homogene DGL 2. Ordnung (die Variable t fällt komplett raus), wenn für den Parameter λ gilt: $\lambda = \frac{\beta}{m}$.

ii. Die Parameter A und B werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt:

$$x'(0) = -\lambda B\, e^0 = -\lambda B \overset{!}{=} v_0 \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{v_0}{\lambda} = -\frac{v_0 m}{\beta}$$

$$x(0) = A + B\, e^0 = A + B \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad A = -B = \frac{v_0 m}{\beta}$$

Damit folgt für die eindeutige Funktion und ihre beiden Ableitungen:

$$x(t) = A + B\, e^{-\lambda t} = \frac{v_0 m}{\beta} - \frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = \frac{v_0 m}{\beta} \cdot \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right)$$

$$v(t) = x'(t) = -\lambda B\, e^{-\lambda t} = \frac{\beta}{m} \cdot \frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = v_0 \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$a(t) = x''(t) = \lambda^2 B\, e^{-\lambda t} = \left(\frac{\beta}{m}\right)^2 \cdot \left(-\frac{v_0 m}{\beta}\right) \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t} = -\frac{v_0 \beta}{m} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

iii. Die Geschwindigkeit nimmt somit exponentiell ab. Daraus folgt für die Bremszeit t_{end}:

$$v(t_{\text{end}}) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t_{\text{end}}} \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{-\frac{\beta}{m} t_{\text{end}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{hat keine Lösung!}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung, denn die Exponentialfunktion nimmt niemals den Wert 0 an. Sie kommt dem Wert 0 für $t_{\text{end}} \to \infty$ nur beliebig nahe. Das führt uns zur komischen Aussage, dass der Wagen unendlich lange weiter rollt, also eigentlich nie zum Stillstand kommt.
Ergibt es dann überhaupt Sinn nach der Strecke bis zum Stillstand zu fragen? Müsste der Wagen jetzt nicht unendlich weit rollen? Die Antwort lautet: Nein! Für unsere Ortsfunktion ergibt sich nämlich im Limes für $t \to \infty$:

$$x_{\text{end}} = \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{\beta} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) = \frac{v_0 m}{\beta} \cdot (1 - 0) = \frac{v_0 m}{\beta}$$

D.h., der Wagen kommt dem Ort $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ beliebig nahe!
In der Realität stimmt das ewige Weiterfahren natürlich nicht, denn es gibt erstens das perfekt reibungsfreie Rollen nicht, d.h., es käme noch eine Rollreibung vergleichbar mit derjenigen unter (a) hinzu. Aber selbst wenn es die perfekt reibungsfreie Rollbahn gäbe, würde die Exponentialfunktion $x(t)$ in nicht allzu langer Zeit so nahe an x_{end} heranrücken, dass der Unterschied zu x_{end}, also $\frac{v_0 m}{\beta} \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}$, unter eine Haarbreite fallen würde. In iv. rechne ich das mit den gegebenen Werten mal kurz durch.
Auf jeden Fall wäre die makroskopisch beobachtbare Bewegung sicher rasch zuende.

iv. Zunächst stellen wir fest, dass $x''(t)$ für $t = 0$ den Wert $-\frac{v_0 \beta}{m}$ ergibt. Daher muss dieser negative Bruch als Anfangsbeschleunigung aufgefasst werden. Zusammen mit $x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$ können wir die Bewegungsfunktionen nochmals übersichtlich notieren:

$$x(t) = x_{\text{end}} - x_{\text{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m} t} = x_{\text{end}} \left(1 - e^{-\frac{\beta}{m} t}\right) \qquad \text{mit} \quad x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta}$$

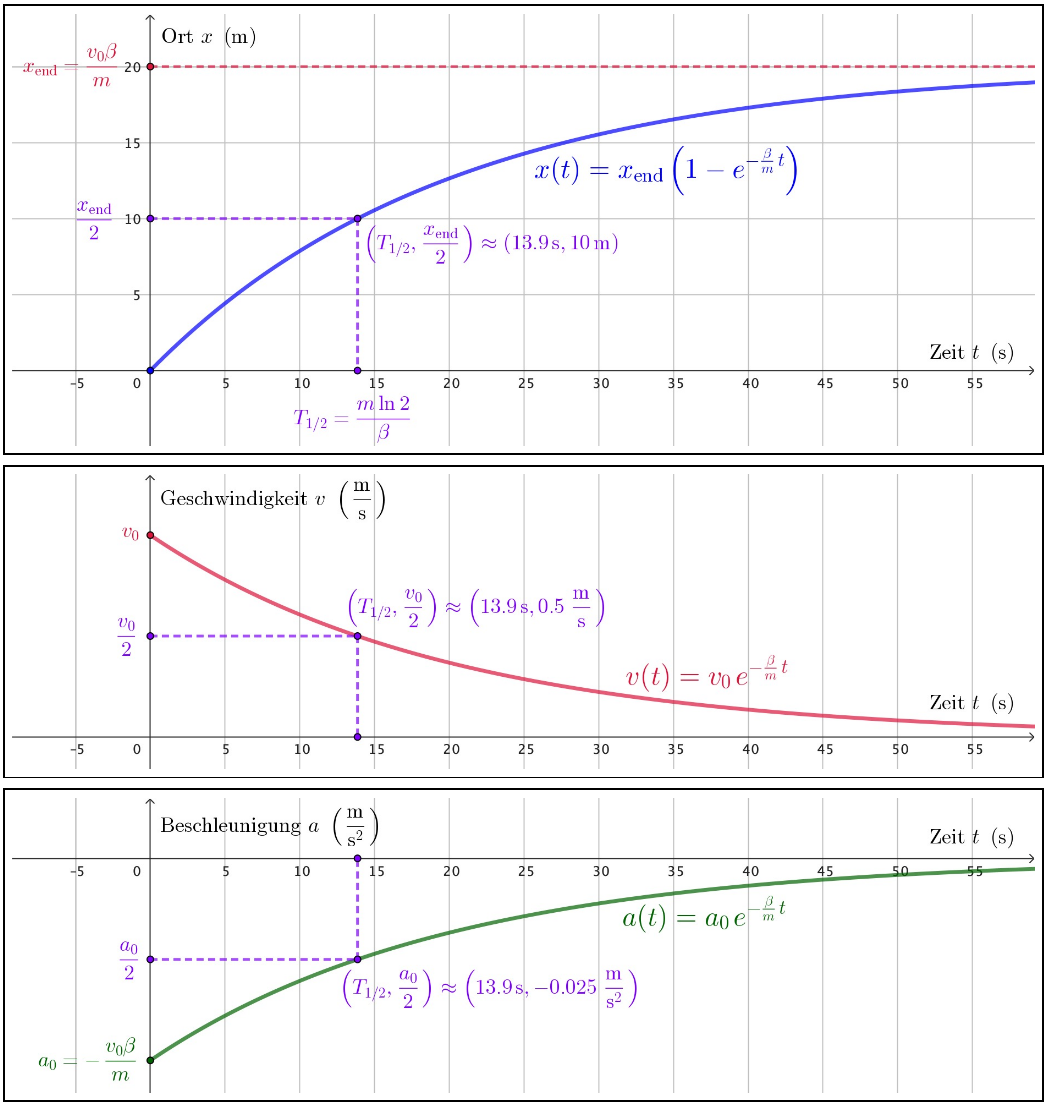
$$v(t) = x'(t) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t}$$

$$a(t) = x''(t) = a_0\, e^{-\frac{\beta}{m} t} \qquad \text{mit} \quad a_0 = -\frac{v_0 \beta}{m}$$

Wir setzen die gegebenen Werte ein und erhalten für x_{end} und a_0:

$$x_{\text{end}} = \frac{v_0 m}{\beta} = \frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2\,\text{kg}}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} = 20\,\text{m} \qquad \text{und} \qquad a_0 = -\frac{v_0 \beta}{m} = -\frac{1\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}}{2\,\text{kg}} = -0.05\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Damit lassen sich die drei Bewegungsdiagramme bequem skizzieren (siehe nächste Seite).



Wie immer bei abnehmenden Exponentialfunktionen können wir die Halbwertzeit $T_{1/2}$ berechnen, die uns sofort ein besseres quantitatives Verständnis ermöglicht:

$$v(T_{1/2}) = v_0\, e^{-\frac{\beta}{m}T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{v_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\frac{\beta}{m}T_{1/2}} \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad T_{1/2} = \frac{m \ln 2}{\beta} = \frac{2\,\text{kg} \cdot \ln 2}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} \approx 13.9\,\text{s}$$

Nach etwa $14\,\text{s}$ ist die halbe Strecke bis x_{end} zurückgelegt und sowohl die Geschwindigkeit, als auch die Beschleunigung sind auf die Hälfte ihrer Anfangswerte gesunken.
Nun möchte ich noch beantwortet haben, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine bestimmte Länge d von x_{end} entfernt ist. Dafür folgt:

$$x_{\text{end}} - x(t) = x_{\text{end}}\, e^{-\frac{\beta}{m}t} \stackrel{!}{=} d \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{d}{x_{\text{end}}} = \frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{x_{\text{end}}}{d}$$

Dabei habe ich ausgenutzt, dass $-\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}$ ist.
Bestimmen wir damit, nach welcher Zeit der Wagen nur noch eine typische Haardicke (ca. $75\,\mu\text{m}$) von x_{end} entfernt ist:

$$t_{\text{Haar}} = \frac{m}{\beta} \cdot \ln \frac{x_{\text{end}}}{d_{\text{Haar}}} = \frac{2\,\text{kg}}{0.1\,\frac{\text{N}}{\text{m/s}}} \cdot \ln \frac{20\,\text{m}}{0.000\,075\,\text{m}} \approx 250\,\text{s}$$

Makroskopisch hat der Wagen also nach etwa vier Minuten angehalten.

v. Wie wir schon längst herausgefunden haben, stehen $A = -B = \frac{v_0 m}{\beta} = x_{\text{end}}$ für die Endweite resp. den Endort, der resp. dem der Wagen für $t \to \infty$ unendlich nahe kommt.

(c) •• *Bremskraft proportional zu v^2 (z.B. Luftwiderstand)*

Nun wird die bremsende Kraft bei kleinen Geschwindigkeiten aufgrund des Quadrates besonders klein. Reicht das noch, um den Wagen innerhalb einer endlichen Strecke zum Stillstand zu bringen?

i. Wie gewohnt leiten wir zuerst ab. Dabei ist $[\ln x]' = \frac{1}{x}$ und $[\frac{1}{x}]' = -\frac{1}{x^2}$. Ausserdem muss auch hier die Kettenregel berücksichtigt werden. Aus der inneren Funktion $At + B$ ergibt sich jeweils ein zusätzlicher Faktor B:

$$x(t) = A \cdot \ln(Bt + C) \qquad \Rightarrow \qquad x'(t) = A \cdot \frac{1}{Bt+C} \cdot B = \frac{AB}{Bt+C}$$

$$\Rightarrow \qquad x''(t) = -\frac{AB}{(Bt+C)^2} \cdot B = -\frac{AB^2}{(Bt+C)^2}$$

Diese Ableitungen setzen wir in die DGL ein:

$$-\gamma \cdot \big(x'(t)\big)^2 = m \cdot x''(t) \qquad \Rightarrow \qquad -\gamma \left(\frac{AB}{Bt+C}\right)^2 = m\left(-\frac{AB^2}{(Bt+C)^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad -\frac{\gamma A^2 B^2}{(Bt+C)^2} = -\frac{mAB^2}{(Bt+C)^2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \gamma A = m \qquad \Leftrightarrow \qquad A = \frac{m}{\gamma}$$

Somit erfüllt der Ansatz die DGL zu allen Zeitpunkten, denn die Variable t ist völlig herausgefallen. Dazu muss aber der Parameter A den Wert $\frac{m}{\gamma}$ aufweisen.

ii. Immer noch sollen der Startort $x_0 = 0$ und die Startgeschwindigkeit $x'(0) = v_0$ vorgegeben sein. Daraus folgern wir:

$$x(0) = A \cdot \ln(B \cdot 0 + C) = A \cdot \ln(C) \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad C = 1$$

$$x'(0) = \frac{AB}{B \cdot 0 + C} = \frac{AB}{C} \overset{C=1}{=} AB \overset{!}{=} v_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad B = \frac{v_0}{A} = \frac{v_0}{\frac{m}{\gamma}} = \frac{\gamma v_0}{m}$$

Numerisch erhalten wir für die Parameter A und B (mit $N = \frac{\mathrm{kg \cdot m}}{\mathrm{s^2}}$):

$$A = \frac{m}{\gamma} = \frac{2\,\mathrm{kg}}{0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2/s^2}}} = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m^2}}{0.1\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{s^2}} = \frac{2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m^2}}{0.1\,\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^2}}\cdot\mathrm{s^2}} = 20\,\mathrm{m}$$

$$B = \frac{v_0}{A} = \frac{1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{20\,\mathrm{m}} = \frac{0.05}{\mathrm{s}} \quad \left(\Rightarrow \quad \frac{1}{B} = \frac{A}{v_0} = \frac{m}{\gamma v_0} = 20\,\mathrm{s}\right)$$

Nun können wir unseren Ansatz und die beiden Ableitungsfunktionen sowohl unter Verwendung der vorgegebenen Parameter m, γ und v_0, als auch numerisch notieren:

$$x(t) = A \cdot \ln(Bt + C) = \frac{m}{\gamma} \cdot \ln\left(\frac{\gamma v_0}{m}t + 1\right) = 20\,\mathrm{m} \cdot \ln\left(\frac{0.05t}{\mathrm{s}} + 1\right)$$

$$x'(t) = \frac{AB}{Bt+C} = \frac{AB}{Bt+1} = \frac{AB}{B\big(t+\frac{1}{B}\big)} = \frac{A}{t+\frac{1}{B}} = \frac{\frac{m}{\gamma}}{t+\frac{m}{\gamma v_0}} = \frac{20\,\mathrm{m}}{t+20\,\mathrm{s}}$$

$$x''(t) = -\frac{AB^2}{(Bt+C)^2} = \frac{-AB^2}{(Bt+1)^2} = \frac{-AB^2}{B^2\big(t+\frac{1}{B}\big)^2} = \frac{-A}{\big(t+\frac{1}{B}\big)^2} = \frac{-\frac{m}{\gamma}}{\big(t+\frac{m}{\gamma v_0}\big)^2} = \frac{-20\,\mathrm{m}}{(t+20\,\mathrm{s})^2}$$

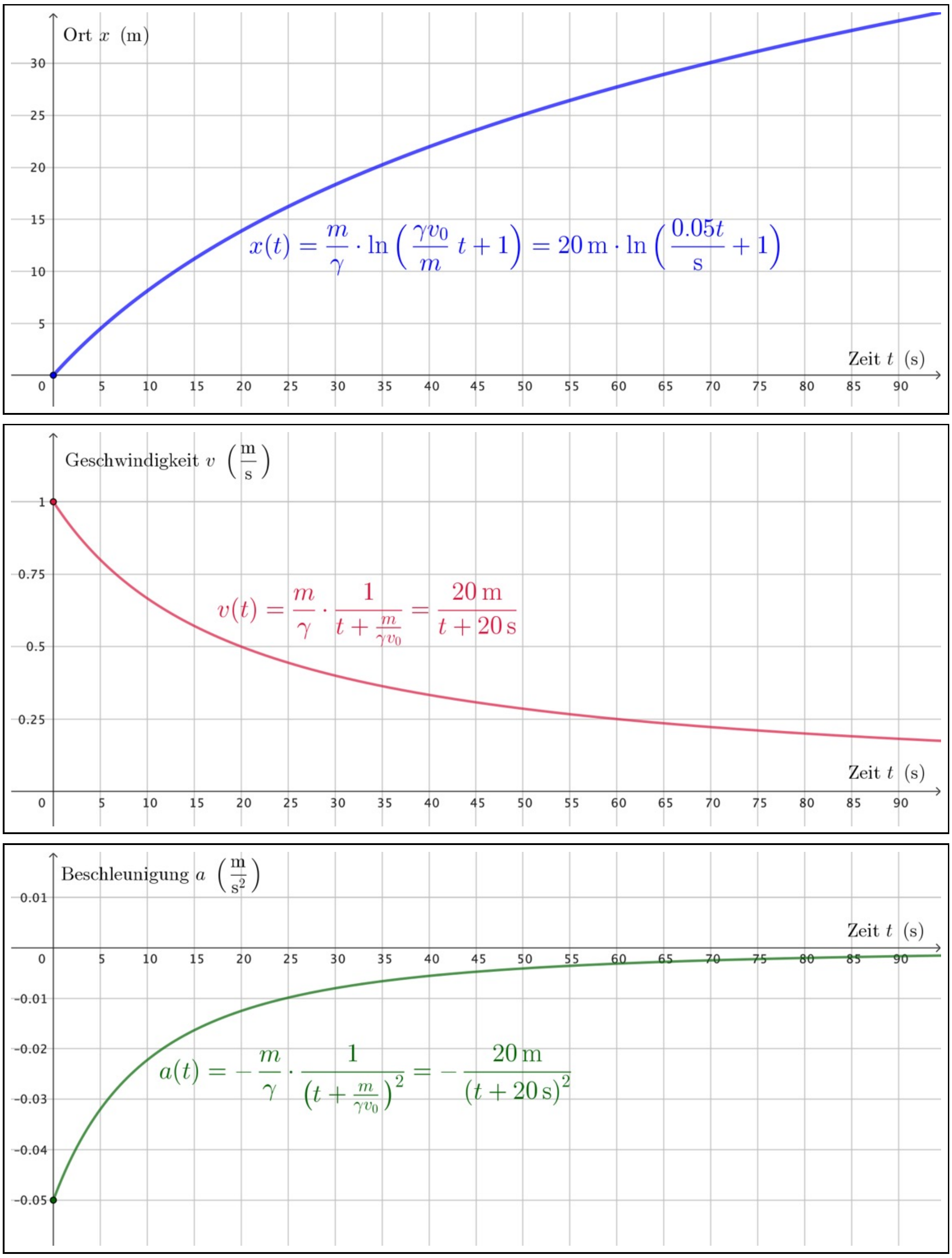
Bem.: Wir sehen, dass der Parameter A die Längeneinheit m erhalten muss, denn der Logarithmus naturalis ist ja einfach eine Zahl (ohne Einheit) und $x(t)$ muss ja eine Ortsangabe liefern. Ebenso ist klar, dass der Parameter B die Einheit $\frac{1}{\mathrm{s}}$ erhalten muss, denn B wird in $x(t)$ mit einer Zeit multipliziert. Dabei muss eine Zahl entstehen, denn nur eine solche Zahl kann erstens zu 1 addiert werden und zweitens kann der Logarithmus nur von einer reinen Zahl berechnet werden.

iii. Das Argument $\frac{\gamma v_0}{m}t+1$ in der Logarithmusfunktion von $x(t)$ ist linear in t, wächst also für $t \to \infty$ ins Unendliche an. Damit wird aber auch der Logarithmus resp. $x(t)$ unendlich gross:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{m}{\gamma} \cdot \ln\left(\frac{\gamma v_0}{m} t + 1 \right) \right) = \infty$$

Der Wagen würde tatsächlich unendlich weit rollen, wenn er nur durch diesen quadratisch von der v abhängigen Luftwiderstand gebremst würde. Das ist in der Realität natürlich nicht der Fall, weil es immer noch andere Reibungseffekte gibt, wie z.B. die Rollreibung oder eine Luftwiderstand-komponente proportional zu v, die nur bei geringen Geschwindigkeiten relevant ist.
Dem entsprechend wird der Wagen auch unendlich lange weiterrollen.

iv. Hier die drei Bewegungsdiagramme:



Geschwindigkeit und Beschleunigung streben im Limes $t \to \infty$ offensichtlich gegen 0. Das passiert aber zu langsam, als dass sich für den Ort $x(t)$ ein endlicher Grenzwert ergeben kann.

3. •• *Horizontales "Federpendel" – die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators*

(a) Wir leiten den Funktionsansatz zweimal ab:

$$\begin{aligned} & x(t) = A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t) \\ \Rightarrow\quad & x'(t) = A\omega\,\cos(\omega t) - B\omega\,\sin(\omega t) \\ \Rightarrow\quad & x''(t) = -A\omega^2\,\sin(\omega t) - B\omega^2\,\cos(\omega t) = -\omega^2\,\big(A\,\sin(\omega t) + B\,\cos(\omega t)\big) = -\omega^2\cdot x(t) \end{aligned}$$

Damit wird sofort klar, dass dieser Ansatz die DGL erfüllt, falls die Kreisfrequenz ω einen bestimmten Wert hat:

$$x''(t) = -\omega^2\,x(t) \overset{!}{=} -\frac{D}{m}\,x(t) \quad\Rightarrow\quad \omega^2 = \frac{D}{m} \quad\Rightarrow\quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Die Differentialgleichung gibt somit den Zusammenhang zwischen der Masse m und der Federkonstanten D auf der einen und der Pendelfrequenz f resp. der Pendelperiode T auf der anderen Seite vor:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad\Rightarrow\qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \quad \text{und} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}$$

Dass unser Funktionsansatz wirklich alle möglichen Lösungen der DGL abdeckt, also effektiv der allgemeinen Lösung entspricht, ergibt sich aus der Tatsache, dass es sich um eine lineare und homogene Differentialgleichung 2. Ordnung für $x(t)$ handelt. Die allgemeine Lösung muss folglich aus der Summe zweier linear unabhängiger Funktionen stehen, hier $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$, die je mit einem Vorfaktor, bei uns A und B, versehen sind. Die Werte von A und B werden erst durch weitere Randbedingungen festgelegt, sodass schliesslich eine an das Problem angepasste und eindeutige Lösung entsteht.

(b) Wir setzen die Randbedingungen in $x(t)$ resp. $x'(t)$ ein und erhalten:

$$\left| \begin{array}{r} x(0) = A\,\sin 0 + B\,\cos 0 \overset{!}{=} x_0 \\ x'(0) = A\omega\,\cos 0 - B\omega\,\sin 0 \overset{!}{=} 0 \end{array} \right| \quad\Leftrightarrow\quad \left| \begin{array}{c} B = x_0 \\ A\omega = 0 \end{array} \right|$$

Aus der unteren Gleichung folgt mit $\omega \neq 0$, dass $A = 0$ sein muss. Somit ergibt sich als eindeutige Lösung die Ortsfunktion:

$$x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t) \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

(c) Wir benutzen die aus der DGL folgende Gleichung für die Kreisfrequenz ω:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{7.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{0.5\,\mathrm{kg}}} = \sqrt{15\,\frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 3.87\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$$

Die Einheit rad steht für eine Winkelangabe im Bogenmass. Bei ω handelt es sich nämlich um eine **Winkelgeschwindigkeit** (= Kreisfrequenz), also um eine Angabe, die die Veränderung eines Winkels pro Zeitspanne beschreibt. Nur so entsteht bei Multiplikation mit einer Zeit t im Argument der Sinus- oder der Cosinusfunktion tatsächlich ein Winkel.

Nun verwenden wir die Zusammenhänge zwischen der Kreisfrequenz ω und der Frequenz f resp. der Periode T, um letztere beiden Angaben zu bestimmen:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{2\pi\,\mathrm{rad}}{3.87\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}} \approx 1.62\,\mathrm{s} \qquad \text{und} \qquad f = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{1.62\,\mathrm{s}} \approx 0.616\,\mathrm{Hz}$$

Für die Ortsfunktion notieren wir formal und numerisch zum Schluss nochmals:

$$x(t) = x_0\cdot\cos(\omega t) = -10\,\mathrm{cm}\cdot\cos\left(3.87\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\cdot t\right)$$

4. • *Mehr Komplexes – Don't you forget!*

(a) $z = \mathrm{i} \cdot (7 - 6\mathrm{i}) = 7\mathrm{i} - 6\mathrm{i}^2 = 6 + 7\mathrm{i}$

(b) $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}\right)(-2 - \mathrm{i}) = -1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i} + 3\mathrm{i} + \frac{3}{2}\,\mathrm{i}^2 = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\,\mathrm{i}$

(c) $z = \frac{13 - 26\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}} = \frac{13(1 - 2\mathrm{i})}{5 + 12\mathrm{i}} \cdot \frac{5 - 12\mathrm{i}}{5 - 12\mathrm{i}} = \frac{13(5 - 12\mathrm{i} - 10\mathrm{i} + 24\mathrm{i}^2)}{25 - 144\mathrm{i}^2} = \frac{13(-19 - 22\mathrm{i})}{169} = -\frac{19}{13} - \frac{22}{13}\,\mathrm{i}$

(d) $4z = 2z^* + 3 \quad \Rightarrow \quad 4(x + \mathrm{i}y) = 2(x - \mathrm{i}y) + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 4x + 4\mathrm{i}y = 2x - 2\mathrm{i}y + 3$

$\Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} 4x = 2x + 3 \\ 4y = -2y \end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix} 2x = 3 \\ 6y = 0 \end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix} x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{matrix} \right| \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{2}$ rein reell!

(e) $z^* - 2\mathrm{i} = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Re}(2z) \quad \Rightarrow \quad x - \mathrm{i}y - 2\mathrm{i} = y + \mathrm{i} \cdot 2x \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} x = y \\ -y - 2 = 2x \end{matrix} \right| \begin{matrix} ① \\ ② \end{matrix}$

$\Rightarrow$ ① in ②: $\quad -x - 2 = 2x \quad \Leftrightarrow \quad -2 = 3x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{2}{3} = y \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\,\mathrm{i}$

Dabei habe ich bei (d) und (e) einfach z durch $x + \mathrm{i}y$ und z^* durch $x - \mathrm{i}y$ ersetzt. Danach müssen jeweils die Realteile beider Gleichungsseiten übereinstimmen und ebenso die Imaginärteile. Somit enthält eine komplexe Gleichung eben zwei reelle Gleichungen.