Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 8: Neue Wege mit dem Aktionsprinzip

- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ◦ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ◦◦ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

Vorbemerkung: Das Aktionsprinzip als Differentialgleichung

In der bisherigen Physik hatten wir das **Aktionsprinzip** (= 2. Newton'sches Axiom) stets in der Form

$$F_{\text{res}} = m \cdot a \tag{1}$$

notiert. Dabei ist F_{res} die **resultierende Kraft**, die sich aus allen auf den betrachteten Körper wirkenden Kräften zusammensetzt. Diese resultierende Kraft legt über das Aktionsprinzip die **Beschleunigung** fest, die der Körper gerade erfährt. In obiger Form war das Aktionsprinzip aber nur auf Situationen anwendbar, wo die resultierende Kraft konstant blieb, sich also die Kräftesituation während dem Vorgang nicht verändert. Dies führt zu einer gleichmässig beschleunigten Bewegung ($a = \text{konst.}$). Es ist klar, dass diese Einschränkung nicht tolerierbar ist. Die Newton'sche Mechanik muss auch in der Lage sein Bewegungsabläufe bei sich verändernder Kräftesituation vorherzusagen!

In dieser Übungsserie eröffnen wir nun das differentielle Verständnis der Newton'schen Mechanik. In irgendeiner Situation soll uns das Aktionsprinzip erlauben, die *Ortsfunktion* $x(t)$ zu bestimmen, also vorauszusagen, wo sich ein Körper zu jedem Zeitpunkt t befindet. Dabei steht die 1. Ableitung für die *Geschwindigkeit* $v(t) = x'(t)$ und die 2. Ableitung für die *Beschleunigung* $a(t) = v'(t) = x''(t)$ zum jeweiligen Zeitpunkt t. Alle wirkenden Kräfte werden selber als Funktionen der Zeit t, des Ortes x und der Geschwindigkeit v aufgefasst, also $F = F(t, x, x')$. Da sich die resultierende Kraft aus lauter solchen Kräften zusammensetzt, gilt für sie die gleiche Aussage: $F_{\text{res}} = F_{\text{res}}(t, x, x')$. Mit diesem Verständnis wird das Aktionsprinzip (1) zu einer Differentialgleichung 2. Ordnung für die Ortsfunktion $x(t)$:

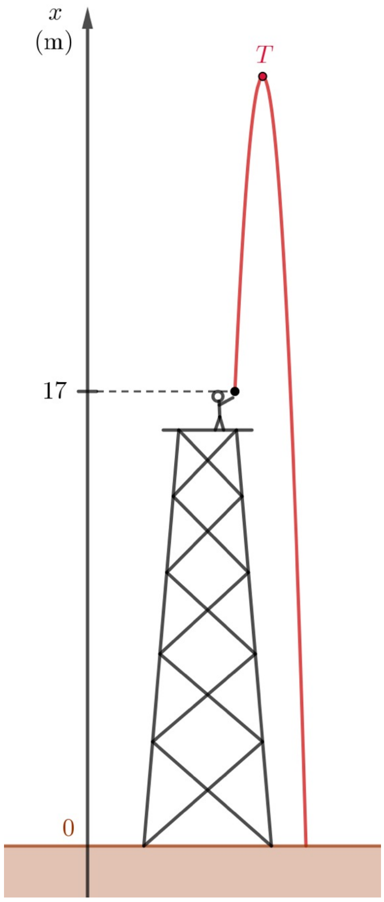
$$F_{\text{res}}(t, x, x') = m \cdot x'' \tag{2}$$

Die allgemeine Lösung von (2) beinhaltet eine ganze Schar von Ortsfunktionen $x(t)$. Der eindeutige Bewegungsablauf wird erst durch die Vorgabe zweier **Rand**-, **Anfangs**- oder **Endbedingungen** festgelegt – es müssen zwei sein, weil die allgemeine Lösung einer DGL 2. Ordnung zwei frei wählbare Parameter enthält.

Konzept der Aufgaben

Bei den Aufgaben dieser Serie geht es nicht darum, dass du selber die allgemeine Lösung der DGL findest. Vielmehr gebe ich den richtigen Ansatz vor und du verifizierst, dass er die DGL tatsächlich löst. Hinterher ermittelst du unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen die noch nicht festgelegten Funktionsparameter. Leite also jeweils den Ansatz für die Ortsfunktion $x(t)$ zweimal ab, um Ausdrücke für $v(t)$ und $a(t)$ zu erhalten, und bestimme anschliessend aufgrund der weiteren Angaben die fehlenden Parameter A und B. Überlege dir, welche physikalische Dimension resp. Bedeutung A und B haben (Länge? Ort? Geschwindigkeit? Etc.).

1. • *Das einfachste Beispiel – der senkrechte Wurf*



Von einem Aussichtsturm wird ein Stein (fast) senkrecht in die Höhe geworfen. Der Stein verlässt die Hand der Werferin auf der Starthöhe $x_0 = 17\,\mathrm{m}$. Nach $t_{\max} = 1.7\,\mathrm{s}$ erreicht er seine maximale Höhe (toter Punkt T). Danach fällt er an der Aussichtsplattform vorbei bis auf den Boden (Höhe $x = 0$).

Der Flug des Steins soll ohne Luftwiderstand vonstatten gehen. Dann wirkt nur die **Gewichtskraft** F_G, die folglich auch gleich der **resultierenden Kraft** F_res sein muss:

$$F_\mathrm{res} = F_\mathrm{G} = -m \cdot g$$

Für den **Ortsfaktor** g wollen wir der Einfachheit halber den Näherungswert $g \approx 10\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} = 10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ benutzen. Das Minuszeichen in der Gleichung besagt, dass F_G nach unten, also entgegengesetzt zur positiven Richtung der x-Achse wirkt.
Mit dem **Aktionsprinzip** gilt nun:

$$F_\mathrm{res} = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad -m \cdot g = m \cdot x''(t)$$

F_res hängt hier weder von t, noch von x, noch von x' ab und es ergibt sich – nach Kürzung von m – die folgende lineare, inhomogene DGL 2. Ordnung für die Ortsfunktion $x(t)$:

$$x''(t) = -g$$

(a) Der Ansatz für die **Ortsfunktion** $x(t)$ bei einer gleich bleibenden Kräftesituation ist eine quadratische Funktion:

$$x(t) = A \cdot t^2 + B \cdot t + C$$

Dabei soll $t = 0$ für den Zeitpunkt des Steinabwurfs stehen. Zeige, dass dieser Ansatz obige DGL erfüllt, wenn der Parameter A einer bestimmten Bedingung genügt.

(b) Lies aus der Beschreibung des Bewegungsablaufs zu Beginn der Aufgabe zwei **Randbedingungen** für die Ortsfunktion $x(t)$ heraus und lege damit die noch unbestimmten Parameter B und C eindeutig fest – einerseits formal in Abhängigkeit der Starthöhe x_0 und der Zeit $t_{\max}$ bis zum höchsten Punkt, andererseits numerisch, also als Zahl mit Einheit.

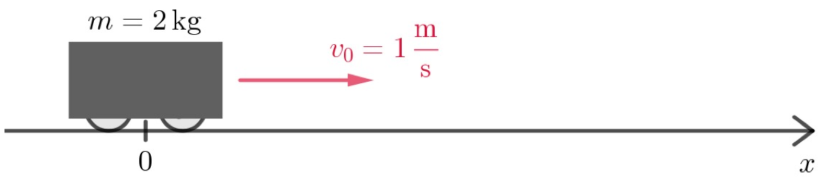
(c) Welche physikalische resp. reale Bedeutung haben die beiden Parameter B und C?

(d) Welche maximale Höhe über Boden erreicht der Stein und nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit schlägt er auf dem Boden auf?

2. *Dreierlei vom Abbremsen*

Es gibt verschiedenartige Kräfte, die die Bewegung eines Objektes verlangsamen können. Ein Beispiel ist wäre eine konstante Reibungskraft, z.B. eine Roll- oder Gleitreibung, ein anderes eine Wirbelstrombremse, deren Bremswirkung proportional zur momentanen Geschwindigkeit v ist, ein drittes ein Luftwiderstand, dessen Stärke typischerweise proportional zu v^2 ist.

Wir betrachten einen Wagen der Masse $m = 2\,\mathrm{kg}$, der durch eine der drei eben beschriebenen Bremsarten verlangsamt wird. Anfangs (zur Zeit $t = 0$ am Ort $x = 0$) habe er jeweils die Geschwindigkeit $v_0 = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Wir interessieren uns für die Strecke und die Zeitspanne bis zum Stillstand:



Stets soll die abbremsende Kraft F_{B} die einzige auf den Wagen wirkende Kraft sein, d.h. $F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{B}}$. Da die Bewegung in die positive Richtung der x-Achse erfolgt, ist $v_0 > 0$. F_{B} wirkt dieser Bewegung entgegen und muss somit als negative Kraft aufgefasst werden: $F_{\mathrm{B}} < 0$.

(a) • *Konstante Reibungskraft (z.B. Rollreibung)*

Die Reibungskraft habe einen konstanten Wert, also $F_{\mathrm{B}} = -\alpha$, den wir als gegeben erachten, sodass sich mit dem Aktionsprinzip eine Differentialgleichung notieren lässt:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{B}} \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\alpha = m \cdot x''(t) \quad \text{resp.} \quad x''(t) = -\frac{\alpha}{m}$$

i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = At^2 + Bt + C$ diese DGL löst, wenn A auf eine bestimmte Weise von den gegebenen Parametern α und m abhängt.
ii. Wie setzen sich die B und C aus v_0, α und m zusammen und wofür stehen sie? **Tipp:** Randbedingungen einsetzen!
iii. Gib zudem in Abhängigkeit von v_0, α und m an, wie weit der Wagen ausrollt (x_{end}) und wie lange der Abbremsvorgang dauert (t_{end}).
iv. Es sei $\alpha = 0.1\,\mathrm{N}$. Berechne x_{end} und t_{end} und lasse dir von *GeoGebra* die drei Funktionen $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ bis zum Stillstand aufzeichnen.

(b) •• *Bremskraft proportional zu v (z.B. Wirbelstrombremse)*

Nun sei die abbremsende Kraft proportional zur momentanen Geschwindigkeit v, also $F_{\mathrm{B}} = -\beta \cdot v$. Mit dem Aktionsprinzip schreiben wir:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{B}} = -\beta \cdot v \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\beta \cdot x'(t) = m \cdot x''(t)$$

Das scheint kompliziert zu sein, denn hier kommt die Ortsfunktion $x(t)$ selber nicht mehr vor, sondern nur ihre 1. und ihre 2. Ableitung. Das braucht dich nun aber gar nicht zu kümmern...

i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A + B \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ diese DGL erfüllt, falls λ auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern β und m abhängt.
ii. Benutze die Randbedingungen um anzugeben, wie sich A und B aus v_0, β und m zusammensetzen.
iii. Versuche nun in Abhängigkeit von v_0, β und m anzugeben, wie weit der Wagen ausrollt und wie lange der Abbremsvorgang dauert.
iv. Es sei $\beta = 0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m/s}}$. Lasse dir von *GeoGebra* $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ aufzeichnen.
v. Welche physikalische Bedeutung haben die beiden Parameter A und B?

(c) •• *Bremskraft proportional zu v^2 (z.B. Luftwiderstand)*

Schliesslich sei die abbremsende Kraft proportional zum Quadrat der momentanen Geschwindigkeit, also $F_{\mathrm{B}} = -\gamma \cdot v^2$. Es folgt:

$$F_{\mathrm{res}} = F_{\mathrm{B}} = -\gamma \cdot v^2 \stackrel{!}{=} m \cdot a \qquad \Rightarrow \qquad -\gamma \cdot \big(x'(t)\big)^2 = m \cdot x''(t)$$

Auch hier treten nur die 1. und die 2. Ableitung der Ortsfunktion $x(t)$ auf – halb so wild!

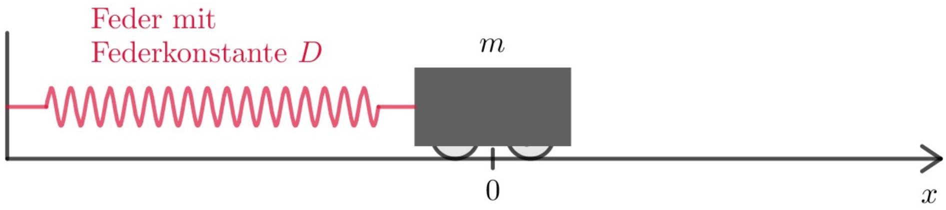
i. Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A \cdot \ln(Bt + C)$ diese DGL erfüllt, falls A auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern γ und m abhängt.
ii. Benutze die Randbedingungen um zu zeigen, wie B und C von v_0, γ und m abhängen.
iii. Wie steht es nun mit der Strecke und der Zeit bis zum Stillstand?
iv. Es sei $\gamma = 0.1\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m^2/s^2}}$. Lasse dir von *GeoGebra* $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ aufzeichnen.

3. •• *Horizontales "Federpendel" – die Differentialgleichung des harmonischen Oszillators*

Ein Wagen sei an einer Spiralfeder mit Federkonstante D befestigt.

Anmerkung: Zu jeder Spiralfeder gehört eine bestimmte Federkonstante D, die ausdrückt, wie stark die Feder ist. Hat eine Feder beispielsweise die Federkonstante $D = 0.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm}}$, so erzeugt die Feder $0.5\,\mathrm{N}$ Kraft pro Zentimeter, um den sie aus ihrer entspannten Lage ausgelenkt ist.

Die Ruhelage des Wagens bei entspannter Feder entspreche dem Ort $x = 0$ auf einer horizontal liegenden Ortsachse:



Wird der Wagen nach links oder nach rechts aus der Ruhelage ausgelenkt, so versucht ihn die Federkraft F_F in die Ruhelage $x = 0$ zurück zu ziehen oder zu stossen. Es gilt:

$$F_\mathrm{F} = -D \cdot x$$

Das Minuszeichen sorgt dafür, dass F_F eine rücktreibende Kraft ist, also in Richtung von $x = 0$ wirkt. Befindet sich der Wagen z.B. bei $x = 5\,\mathrm{cm} > 0$, so wird F_F negativ. Umgekehrt ist F_F positiv, wenn sich der Wagen z.B. bei $x = -5\,\mathrm{cm} < 0$ aufhält.

Wenn wir von einer reibungsfreien Rollbahn und vernachlässigbarem Luftwiderstand ausgehen, ist die Federkraft F_F die einzige auf den Wagen wirkende Kraft. D.h., die Federkraft ist gerade die resultierende Kraft F_res und wir können schreiben:

$$F_\mathrm{F} = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$$

Mit dem Ausdruck für die Federkraft von oben folgt damit:

$$-D \cdot x = m \cdot \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad \text{resp.} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{D}{m}\,x \qquad \text{oder} \qquad x''(t) = -\frac{D}{m}\,x(t)$$

Anfangsbedingungen: Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde der Wagen von der Stelle $x_0 = -10\,\mathrm{cm}$ aus losgelassen ($v_0 = 0$).

(a) Zeige, dass der Ansatz $x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)$ diese DGL erfüllt, falls ω auf eine bestimmte Art von den gegebenen Parametern D und m abhängt.

(b) Der Wagen habe eine Masse von $0.5\,\mathrm{kg}$ und die Federkonstante betrage $7.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.
Mit welcher Kreisfrequenz ω schwingt der Wagen hin und her? Und wie gross sind folglich Frequenz f und Periode T dieser Schwingung?

(c) Wie sind die Parameter A und B in der allgemeinen Lösung zu setzen, um obige Anfangsbedingungen zu erfüllen? Wie lautet die vollständige Ortsfunktion $x(t)$ für den Wagen?

4. • *Mehr Komplexes – Don't you forget!*

Berechne z:

(a) $z = \mathrm{i} \cdot (7 - 6\mathrm{i})$

(b) $z = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)(-2 - \mathrm{i})$

(c) $z = \frac{13 - 26\mathrm{i}}{5 + 12\mathrm{i}}$

(d) $4z = 2z^* + 3$

(e) $z^* - 2\mathrm{i} = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{i} \cdot \mathrm{Re}(2z)$