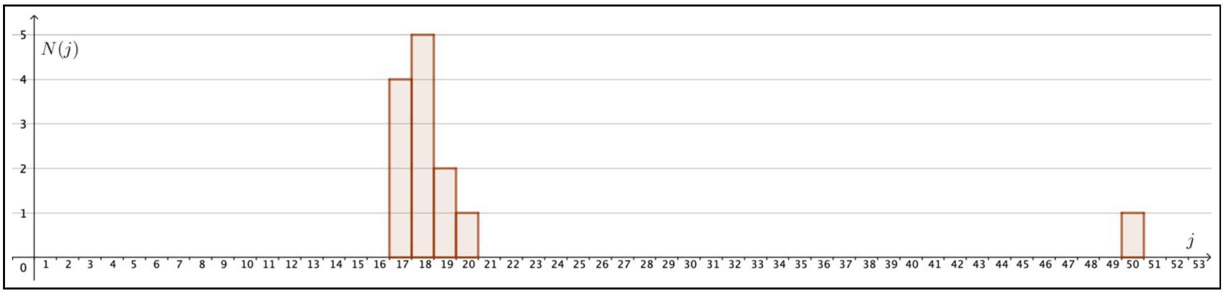
Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 9: Statistik mit dskreten Variablen – LÖSUNGEN

1. • *Die Altersstatistik in unserem "QM-Grüppli"*

   (a) Für das Histogramm erhalten wir:



   (b) i. Das wahrscheinlichste Alter ist klar 18, sowohl mit Alex, als auch ohne ihn. Auch der Median ist in beiden Fällen identisch, nämlich 18.

   ii. Beim Erwartungswert handelt es sich einfach um den Altersdurchschnitt. Man kann auch sagen, der Erwartungswert ist das gewichtete Mittel der verschiedenen Alter j, wobei die Gewichte $N(j)$ für die Anzahl Personen des jeweiligen Alters stehen. $P(j) = \frac{N(j)}{N}$ ist das relative Gewicht resp. die Wahrscheinlichkeit für den einzelnen Alterswert.
   Zuerst die Berechnung "von Hand" für die Gruppe ohne Alex mit $N = \sum_j N(j) = 4+5+2+1 = 12$:

$$\begin{aligned}\langle j\rangle_{\text{ohne}} &= \sum_j P(j)\cdot j = \sum_j \frac{N(j)\cdot j}{N} = \frac{\sum_j N(j)\cdot j}{N}\\ &= \frac{4\cdot 17+5\cdot 18+2\cdot 19+1\cdot 20}{12} = \frac{68+90+38+20}{12} = \frac{216}{12} = 18\end{aligned}$$

   Der Erwartungswert mit Alex liegt bei $\langle j\rangle_{\text{mit}} = 20.46$ und unterscheidet sich klar von demjenigen ohne Alex. Ein einzelner markanter Abweicher (Alex) hat sichtbaren Einfluss auf den Durchschnitt!

   iii. Die Varianz ist die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert, also das gewichtete Mittel aus allen Einzelwerten der Form $(j - \langle j\rangle)^2$. Für den Fall ohne Alex ergibt sich:

$$\begin{aligned}\sigma^2_{\text{ohne}} = \left\langle \left(j-\langle j\rangle\right)^2\right\rangle &= \sum_j P(j)\cdot\left(j-\langle j\rangle\right)^2 = \sum_j \frac{N(j)\left(j-\langle j\rangle\right)^2}{N} = \frac{\sum_j N(j)\left(j-\langle j\rangle\right)^2}{N}\\ &= \frac{4\cdot(17-18)^2+5\cdot(18-18)^2+2\cdot(19-18)^2+1\cdot(20-18)^2}{12}\\ &= \frac{4\cdot(-1)^2+5\cdot 0+2\cdot 1^2+1\cdot 2^2}{12} = \frac{4+0+2+4}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

   Die Wurzel aus der Varianz ergibt die Standarbabweichung:

$$\sigma_{\text{ohne}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \approx 0.913$$

   Für die Altersverteilung mit Alex erhalten wir:

$$\sigma^2_{\text{mit}} \approx 73.479 \qquad \Rightarrow \qquad \sigma_{\text{mit}} \approx 8.57$$

   Bei Varianz und Standardabweichung sorgt der einzelne deutliche Abweicher (Alex) für einen richtig grossen Unterschied!

iv. Für die alternative Berechnung der Varianz benötigen wir das mittlere Altersquadrat. Dafür ergibt sich in der Verteilung ohne Alex:

$$\begin{aligned}\langle j^2\rangle_{\text{ohne}} &= \sum_j P(j)\cdot j^2 = \sum_j \frac{N(j)\cdot j^2}{N} = \frac{\sum_j N(j)\cdot j^2}{N}\\ &= \frac{4\cdot 17^2+5\cdot 18^2+2\cdot 19^2+1\cdot 20^2}{12} = \frac{4\cdot 289+5\cdot 324+2\cdot 361+1\cdot 400}{12}\\ &= \frac{1156+1620+722+400}{12} = \frac{3898}{12} = \frac{1949}{6} = 324\,\frac{5}{6}\end{aligned}$$

Nun erhalten wir für die alternative Berechnung der Varianz:

$$\sigma^2_{\text{ohne}} = \langle j^2\rangle - \langle j\rangle^2 = 324\,\frac{5}{6} - 18^2 = 324\,\frac{5}{6} - 324 = \frac{5}{6}$$

Somit ergibt sich das genau gleiche Resultat wie bei der ersten Varianzberechnung. (Natürlich funktioniert dies auch bei der Verteilung mit Alex.)

In diesem Fall scheint es so, als wäre die alternative Berechnung klar mühsamer, weil so grosse Quadratzahlen berechnet und Vielfache davon summiert werden müssen. Die Einfachheit der ursprünglichen Berechnung hat aber vor allem damit zu tun, dass sich bei der Berechnung des Erwartungswertes eine dermassen einfacher Wert von $\langle j\rangle_{\text{ohne}} = 18$ ergeben hat. Damit fiel die Ermittlung aller quadratischen Abweichungen $\big(j - \langle j\rangle\big)^2$ extrem leicht, z.B. $(20-18)^2 = 2^2 = 4$. Hätten wir hingegen beim mittleren Alter z.B. $\langle j\rangle_{\text{ohne}} = 18.14$ erhalten, so wären alle weiteren Rechenschritte aufgrund der Dezimalbrüche richtig mühsam ausgefallen. Plötzlich wären uns dann die grossen, aber stets natürlichen (!) Quadrate der alternativen Methode wieder einfach vorgekommen.

Verwenden wir zur Berechnung einen Computer, lautet die Frage nach der Einfachheit allerdings ein wenig anders. Dann geht es nämlich einfach um die Anzahl der Rechenschritte, die benötigt werden – und in dieser Hinsicht ist die alternative Methode besser, weil die Bestimmung des mittleren quadratischen Wertes weniger einzelne Rechenschritte umfasst als die Berechnung der mittleren quadratischen Abweichung.

(c) Ein paar Erläuterungen zu den Unterschieden zwischen den Fällen ohne und mit Alex:

Wahrscheinlichstes Alter: In beiden Fällen erhalten wir die Antwort 18. Die Hinzugabe eines bisher nicht enthaltenen Einzelalterswertes kann auf das wahrscheinlichste Alter keinen Einfluss haben, denn zu diesem häufigsten Alter gehören mehrere gleichaltrige Personen.

Median: Auch hier ist der Wert in beiden Fällen derselbe. Die Hinzugabe eines einzelnen hohen Alterswertes verschiebt den Median in der Aneinanderreichung aller Alterswerte nur einen halben Schritt weiter. In unserer Verteilung wird dadurch aber gar kein neuer Wert erreicht. Wir bleiben im Bereich der 18-er.

Mittelwert: Ein einzelner Ausreisser – bei uns 50 Jahre – führt bei unserem nicht allzu grossem $N = 13$ wirklich zu einer merklichen Verschiebung des Mittelwertes. Diese ist zwar nicht riesig, bei uns aber doch schon so gross, dass der Mittelwert $\langle j\rangle_{\text{mit}} \approx 20.46$ bereits ausserhalb des "Altershaufens" von 17 bis 20 Jahren liegt.

Varianz und Standardabweichung: Varianz und Standardabweichung sind ein *Streuungsmasse*. In der Verteilung ohne Alex liegen alle Alterswerte einigermassen nahe beieinander. Die Verteilung streut wenig und es ergibt sich eine recht kleine Varianz und somit auch eine ziemlich geringe Standardabweichng.

Der eine krasse Altersausreisser 50 verändert diese Streuungsmasse richtig stark. Das hat damit zu tun, dass in die Varianz die Abweichung der Einzelwerte zum Mittelwert quadratisch einfliesst. Und da schenkt eben der Unterschied zwischen $\langle j\rangle_{\text{mit}} \approx 20.46$ und $j = 50$ richtig deftig ein, denn $(j - \langle j\rangle_{\text{mit}})^2 \approx (50 - 20.46)^2 = 29.54^2 \approx 872.6$. Dieser Wert fliesst zwar nur mit Gewicht $\frac{1}{13}$ in die Berechnung der Varianz mit ein, aber das sind dann immer noch $\frac{872.6}{13} \approx 67.12$, also ein richtig grosser Anteil der gesamten Varianz von $\sigma^2_{\text{mit}} \approx 73.48$. Der Exot 50 ist also für $\frac{67.12}{73.48} \approx 91.3\,\%$ der Varianz zuständig.

2. • *Diskrete Statistik beim Würfelspiel*

(a) Zunächst sollten wir uns über die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Resultate Klarheit verschaffen! Jeder der beiden Würfel zeigt eine bestimmte Anzahl Augen von 1 bis 6 mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der erste Würfel z.B. $x = 3$ und der zweite Würfel $y = 5$ zeigt, genau $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Auf diese Weise gibt es $N = 36$ verschiedene Augenkombinationen (x, y), die alle mit derselben Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{36}$ gewürfelt werden.

Nun können wir kombinatorisch verstehen, wie viele dieser Kombinationen zu einem bestimmten Augensummenresultat j gehören: Zu $j = 2$ gibt es genau eine Kombination, nämlich $(x, y) = (1, 1)$. Zu $j = 3$ gehören die beiden Kombinationen $(1, 2)$ und $(2, 1)$, während es zu $j = 4$ mit $(1, 3)$, $(2, 2)$ und $(3, 1)$ bereits drei Kombinationen gibt. Wenn wir die weiteren Resultate systematisch durchdenken, finden wir:[1]

Resultat j	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
Anz. Kombinationen $N(j)$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36
Rel. Häufigkeit $P(j)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1
Flos Gewinnfunktion $f(j)$	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	11	-12	–

Nun können wir die Perspektive eines Spielers einnehmen. Betrachten wir das Spiel z.B. aus Flos Sicht, so ist seine Gewinnfunktion $f(j)$ gegeben durch:

$$f(j) = \begin{cases} -j & \text{für } j \text{ gerade} \\ j & \text{für } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

Die expliziten Werte dieser Funktion sind oben tabelliert.

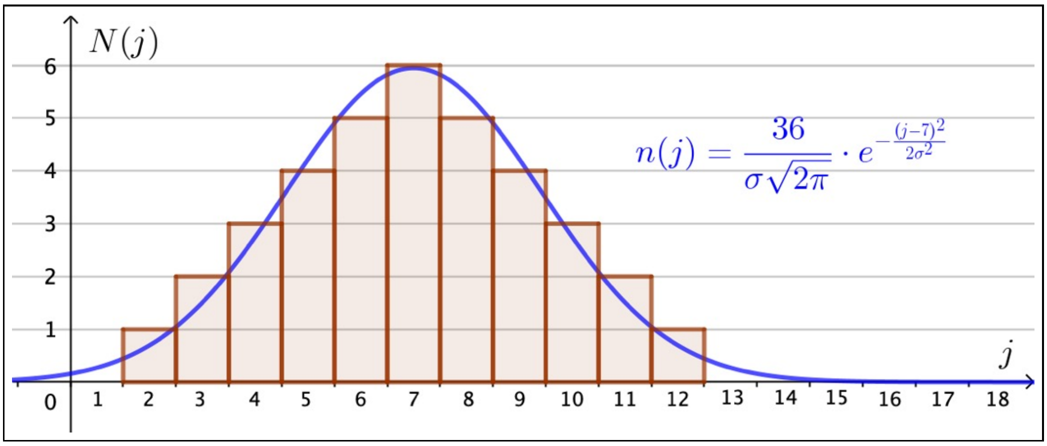
Bestimmen wir den Mittelwert dieser Gewinnfunktion, so erfahren wir, ob Flo im langzeitigen Durchschnitt vieler Spiele Gewinn einfährt oder Verlust macht:

$$\begin{aligned}
\langle f(j) \rangle = \sum_{j=2}^{12} P(j) \cdot f(j) = \sum_{j=2}^{12} \frac{N(j) \cdot f(j)}{N} &= \frac{1}{36} \cdot \sum_{j=2}^{12} N(j) \cdot f(j) \\
&= \frac{1}{36} \cdot \big(1 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 + 5 \cdot (-6) + 6 \cdot 7 + \ \ldots \\
&\qquad \ldots + 5 \cdot (-8) + 4 \cdot 9 + 3 \cdot (-10) + 2 \cdot 11 + 1 \cdot (-12)\big) \\
&= \frac{1}{36} \cdot (-2 + 6 - 12 + 20 - 30 + 42 - 40 + 36 - 30 + 22 - 12) = \frac{1}{36} \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Flos Gewinnerwartungswert beträgt 0. Flo macht somit auf die Dauer im Schnitt weder Gewinn, noch Verlust! Dasselbe gilt natürlich für Basil. Tatsächlich handelt es sich in diesem Sinn um ein *faires* Spiel zwischen den beiden.

[1] Zumindest soviel kann man beim Spiel *Die Siedler von Catan* wahrscheinlichkeitstechnisch lernen oder mitnehmen: Bei der Startaufstellung platziert man seine ersten beiden Siedlungen mit Vorzug an Felder mit den Zahlen 6 und 8, da diese mit zwei Würfeln am häufigsten gewürfelt werden, wenn man mal von der 7 absieht, bei der der Räuber kommt.

(b) In der Tabelle oben sehen wir die Verteilung der Würfelresultate. Sie steigt von $j = 2$ bis $j = 7$ gleichmässig von $N(2) = 1$ bis $N(7) = 6$ an und fällt nachher bis $j = 12$ wieder ebenso gleichmässig ab. Der Mittelwert dieser Resultate muss aufgrund der Symmetrie zwangsläufig bei $j = 7$ liegen.



Damit lässt sich nun die mittlere quadratische Abweichung vom Mittelwert, also die Varianz σ^2 bestimmen:

$$\sigma^2 = \left\langle \left(j - \langle j\rangle\right)^2 \right\rangle = \sum_j P(j) \cdot \left(j - \langle j\rangle\right)^2 = \sum_{j=2}^{12} \frac{N(j)\left(j - \langle j\rangle\right)^2}{N} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=1}^{12} N(j)\left(j - \langle j\rangle\right)^2$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \left(1 \cdot (2-7)^2 + 2 \cdot (3-7)^2 + 3 \cdot (4-7)^2 + 4 \cdot (5-7)^2 + 5 \cdot (6-7)^2 + 6 \cdot (7-7)^2 \ldots\right.$$

$$\left.\ldots + 5 \cdot (8-7)^2 + 4 \cdot (9-7)^2 + 3 \cdot (10-7)^2 + 2 \cdot (11-7)^2 + 1 \cdot (12-7)^2\right)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot (1 \cdot 25 + 2 \cdot 16 + 3 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 16 + 1 \cdot 25)$$

$$= \frac{25 + 32 + 27 + 16 + 5 + 0 + 5 + 16 + 27 + 25}{36} = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$$

Für die Standardabweichung folgt somit:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{210}{36}} = \frac{\sqrt{210}}{6} \approx 2.415$$

Schauen wir nun wie viele Resultate innerhalb von $\langle j\rangle \pm \sigma = 7 \pm 2.4$ liegen. Das sind alle Resultate von $j = 5$ bis $j = 9$, also $4 + 5 + 6 + 5 + 4 = 24$ Stück. Bei einer Gesamtzahl von $N = 36$ ergibt sich somit ein Prozentsatz von $\frac{24}{36} = \frac{2}{3} \approx 66.7\,\%$.
Unsere Resultatverteilung streut also ähnlich wie eine Normalverteilung. Zum Vergleich habe ich die zu einer (kontinuierlichen!)

$$\textbf{Normalverteilung} \qquad n(j) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\langle j\rangle)^2}{2\sigma^2}}$$

gehörende Kurve mit derselben Standardabweichung $\sigma = 2.415$ über das Histogramm oben gelegt. Dabei beträgt die Fläche unter der Normalverteilung $A = 36$, ist also genau gleich gross wie die braune Histogrammfläche, wodurch die beiden Verteilungen vergleichbar werden. Tatsächlich sehen wir eine recht gute Übereinstimmung – wir sind also sichtbar nicht so weit von einer Normalverteilung entfernt, auch wenn wir es beim Würfeln mit diskreten Werten j zu tun haben.

3. • *Umrechnungen zwischen Summenschreibweise und Euler-Darstellung komplexer Zahlen*

   (a) i. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 2\cdot(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{\pi}{4}) = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$

   ii. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 5\cdot(\cos\pi + \mathrm{i}\cdot\sin\pi) = 5\cdot(-1 + \mathrm{i}\cdot 0) = -5$

   iii. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = \sqrt{3}\cdot\big(\cos(-\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\cdot\sin(-\frac{\pi}{3})\big) = \sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{2} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}$

   iv. $z = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) = 6\cdot(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}) = 6\cdot(0 - \mathrm{i}\cdot 1) = -6\mathrm{i}$

   (b) Das Umwandeln in Polarkoordinaten ist ein wenig aufwändiger:

   i. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$, $\varphi = \arctan\frac{-2}{2} = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ (4. Quadrant)
   $\Rightarrow z = 2\sqrt{2}\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$

   ii. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+0^2} = 3$, $\varphi = \arctan\frac{0}{3} = \arctan 0 = 0$ (positive reelle Achse)
   $\Rightarrow z = 3\,e^{0} = 3$

   iii. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{0^2+3^2} = 3$, $\varphi = \arctan\frac{-3}{0}$ ist undefiniert (negative imaginäre Achse)
   $\Rightarrow z = 3\,e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$

   iv. $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = 4$, $\varphi = \arctan\frac{-2\sqrt{3}}{-2} - \pi = \arctan\sqrt{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3}$
   (3. Quadrant) $\Rightarrow z = 4\,e^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$

4. •• *Das Verständnis der komplexen Multiplikation und Division*

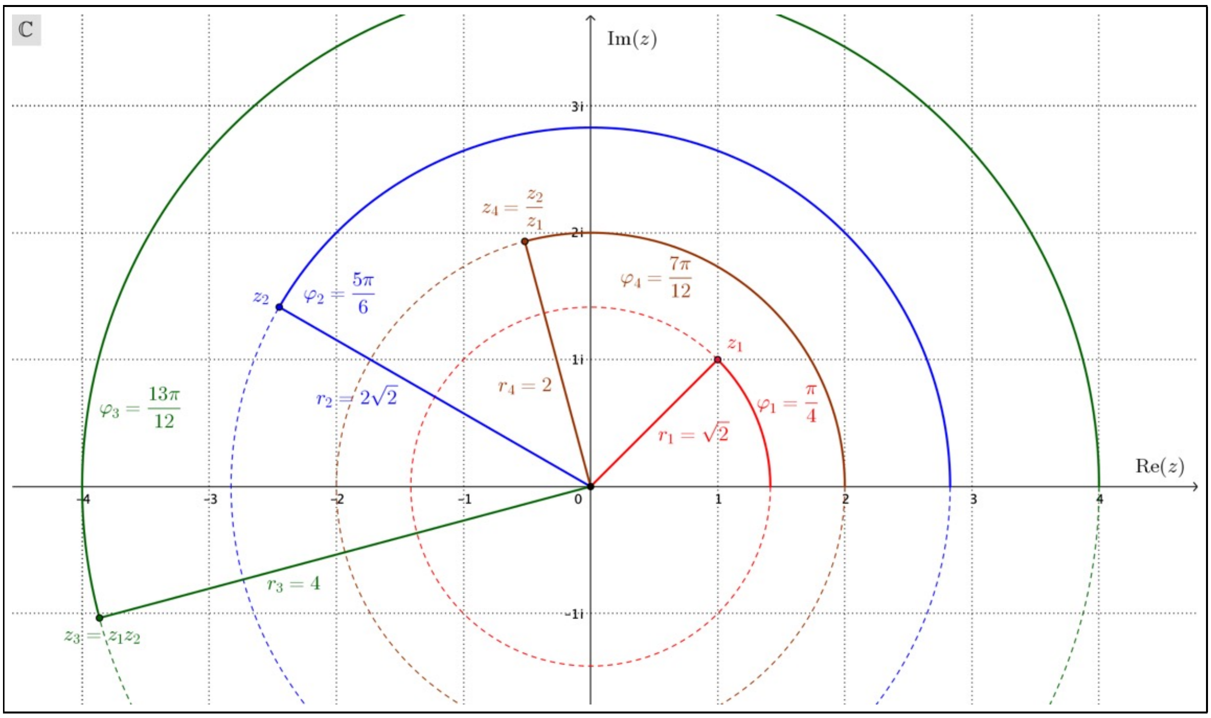
   (a) In kartesischen Koordinaten erhalten wir:

$$z_3 = z_1 z_2 = (1+\mathrm{i})\big(-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}\big) = -\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i} - \sqrt{6}\,\mathrm{i} - \sqrt{2} = -\sqrt{6}-\sqrt{2}+\mathrm{i}\big(\sqrt{2}-\sqrt{6}\big)$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}+\sqrt{6}\,\mathrm{i}+\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

   (b) Für das Eintragen der Punkte sind ungefähre Dezimalangaben für die kartesischen Koordinaten ganz hilfreich (wenn man die Darstellung nicht ohnehin mit GeoGebra anfertigt):

$$z_2 \approx -2.45 + 1.41\,\mathrm{i} \qquad z_3 = z_1 z_2 \approx -3.86 - 1.04\,\mathrm{i} \qquad z_4 = \frac{z_2}{z_1} \approx -0.52 + 1.93\,\mathrm{i}$$



(c) Die Umrechnung von z_1 fällt relativ leicht:

$$z_1 = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

Bei z_2 finden wir zunächst für den Betrag:

$$r_2 = \sqrt{6+2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Und für die Winkelkoordinate ergibt sich:

$$\varphi_2 = \arctan\frac{y_2}{x_2} + \pi = \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \quad \text{(2. Quadrant)}$$

Somit schreiben wir für z_2:

$$z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}\,\mathrm{i} = 2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$$

Mit diesen Euler-Darstellungen werden Multiplikation und Division dank der Potenzregeln sehr einfach:

$$z_3 = z_1 z_2 = \sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \cdot 2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = 4\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\right)} = 4\, e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}$$

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{2\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}}{\sqrt{2}\, e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}} = 2\, e^{\mathrm{i}\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)} = 2\, e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}}$$

(d) Multiplikation und Division erzeugen je eine Drehstreckung in der komplexen Ebene:

- Wird z_2 mit $z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ multipliziert, so wird der zu z_2 gehörende Punkt mit Faktor r_1 vom Ursprung weggestreckt und anschliessend um den Winkel φ_1 gegen den Uhrzeigersinn gedreht.
- Wird z_2 durch $z_1 = r_1 e^{\mathrm{i}\varphi_1}$ dividiert, so wird der zu z_2 gehörende Punkt mit Faktor $\frac{1}{r_1}$ vom Ursprung weggestreckt und anschliessend um den Winkel φ_1 im Uhrzeigersinn gedreht.

(e) Wir können uns etwas plump von der besagten Gleichheit überzeugen, indem wir schauen, welche Dezimalzahlen der TR ausspuckt, wenn wir beispielsweise die kartesischen Koordinaten von $z_3 = z_1 z_2$ ausrechnen:

$$z_3 = 4e^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}} = 4\left(\cos\frac{13\pi}{12} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{13\pi}{12}\right) \approx -3.86 - 1.04\,\mathrm{i}$$

Das stimmt mit der Dezimalangabe für $z_1 z_2$ von weiter oben überein und funktioniert auch für $\frac{z_2}{z_1}$.

(f) Betrachten wir den Punkt $\frac{z_2}{z_1}$, so gilt offensichtlich die Gleichheit:

$$z_4 = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} = 2e^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}} = 2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + \mathrm{i}\cdot\sin\frac{7\pi}{12}\right)$$

Wegen der Eindeutigkeit von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl (Identifikationstrick) folgern wir aus dem Vergleich der Resultate von (a) und von (e):

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \qquad \text{und} \qquad \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

Diese Identitäten kann man übrigens auch direkt aus den **Additionstheoremen** für die Sinus- und die Cosinusfunktion erhalten. Sie lauten:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \qquad \text{und} \qquad \cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Damit finden wir sofort:

$$\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

5. • *Verständnisschärfung für komplexe Zahlen der Form* $e^{\mathrm{i}\varphi}$

(a) Eine komplexe Zahl der Form $e^{\mathrm{i}\varphi}$ liegt in der Gauss'schen Zahlenebene auf dem Einheitskreis um den Ursprung und hat folglich den Betrag 1:

$$|e^{\mathrm{i}\varphi}| = 1$$

φ steht für den Winkel zwischen der positiven reellen Achse und der Blickrichtung zu $e^{\mathrm{i}\varphi}$. Für positive Winkelwerte müssen wir von der x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn um den Ursprung drehen, für negatives φ im Uhrzeigersinn.

(b) Multiplizieren wir eine komplexe Zahl z mit $e^{\mathrm{i}\varphi}$, so wird z dadurch um den Winkel φ um den Ursprung gedreht. Der Betrag von z, also der Abstand zum Ursprung, bleibt dabei unverändert. Wiederum steht $\varphi > 0$ für eine Drehung im Gegenuhrzeigersinn, während $\varphi < 0$ eine Drehung im Uhrzeigersinn erzeugt.