Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 9: Statistik mit diskreten Variablen und Euler-Darstellung komplexer Zahlen

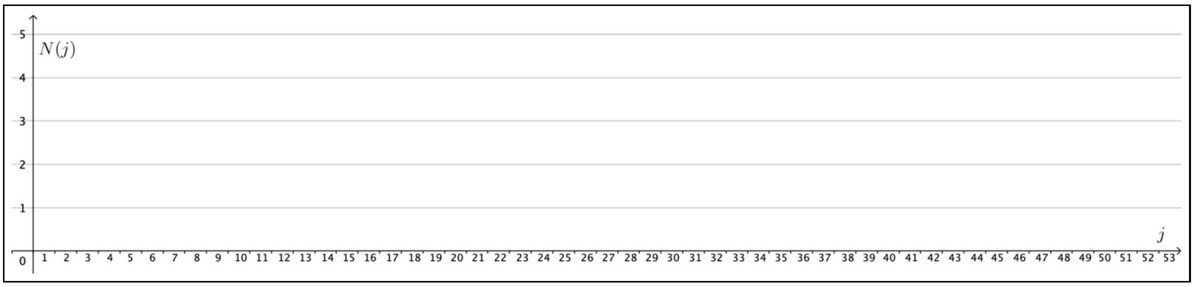
- • *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- •• *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
- ○ *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
- ○○ *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. • *Die Altersstatistik in unserem "QM-Grüppli"*

   Wir betrachten die Altersangaben in unserer EF-Klasse vor zwei Wochen (Stichtag: Do 13.11.25):

   17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 18, 18, 19, 19, 20 und 50

   (a) Skizziere das **Histogramm** für unsere Altersverteilung, wie es in Abb. 1.4 im Griffiths gezeigt wird.



   (b) Führe die folgenden Schritte zweimal durch – einmal für die Verteilung <u>ohne Alex</u> und einmal <u>mit Alex</u>. Mache im Fall "ohne Alex" alles von Hand, also mit Bruchrechnen (ev. mit minimaler Unterstützung des TRs). Adaptiere im Fall "mit Alex" unser `Excel`-File aus dem Unterricht:

   i. Gib das **wahrscheinlichste Alter**, den **Median** der Altersverteilung an.

   ii. Berechne den **Erwartungswert** der Altersverteilung.

   iii. Bestimme zudem die **Varianz** und die **Standardabweichung**.

   iv. Überprüfe weiter, ob bei der Varianz gilt:

   $$\langle (\Delta j)^2 \rangle = \langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2$$

   Berechne σ^2 also zusätzlich via $\langle j^2 \rangle - \langle j \rangle^2$ und vergleiche mit dem Resultat aus iii.
   Welcher Weg zur Varianzberechnung war hier einfacher/rascher?

   (c) Welche Werte unterscheiden sich beim Vergleich der beiden Fälle "mit Alex" und "ohne Alex überhaupt/geringfügig/deutlich? Weshalb wohl?

2. • *Diskrete Statistik beim Würfelspiel*

   Arbeite im Folgenden mit dem bekannten Formalismus: j, $N(j)$, $P(j)$, etc.

   Basil und Flo zocken mit zwei sechseitigen Würfeln. Bei jedem Wurf addieren sie die Augen beider Würfel zum Resultat j. Ist j gerade, erhält Basil j Franken von Flo. Bei ungeradem j zahlt Basil entsprechend j Franken an Flo.

   (a) Wer gewinnt längerfristig bei diesem Spiel, Basil oder Flo?

   (b) Wären die Resultate j sogenannt *normalverteilt* – was immer das bedeuten mag – so würden bei (unendlich) langem Spielen 68.3 % der erwürfelten Resultate im Bereich $\langle j \rangle \pm \sigma$ liegen.
   Wie sieht es mit diesem Prozentsatz bei Flos und Basils Würfelspiel aus?

3. • *Umrechnungen zwischen Summenschreibweise und Euler-Darstellung komplexer Zahlen*

   (a) Notiere die komplexen Zahlen mit folgenden Polarkoordinaten in der Summenschreibweise $z = x + y\mathrm{i}$ (alles **exakt**!):

   i. $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}$ ii. $r = 5, \varphi = \pi$ iii. $r = \sqrt{3}, \varphi = -\frac{\pi}{3}$ iv. $r = 6, \varphi = \frac{3\pi}{2}$

   (b) Gib die folgenden komplexen Zahlen in der Euler-Darstellung an (alles **exakt**!):

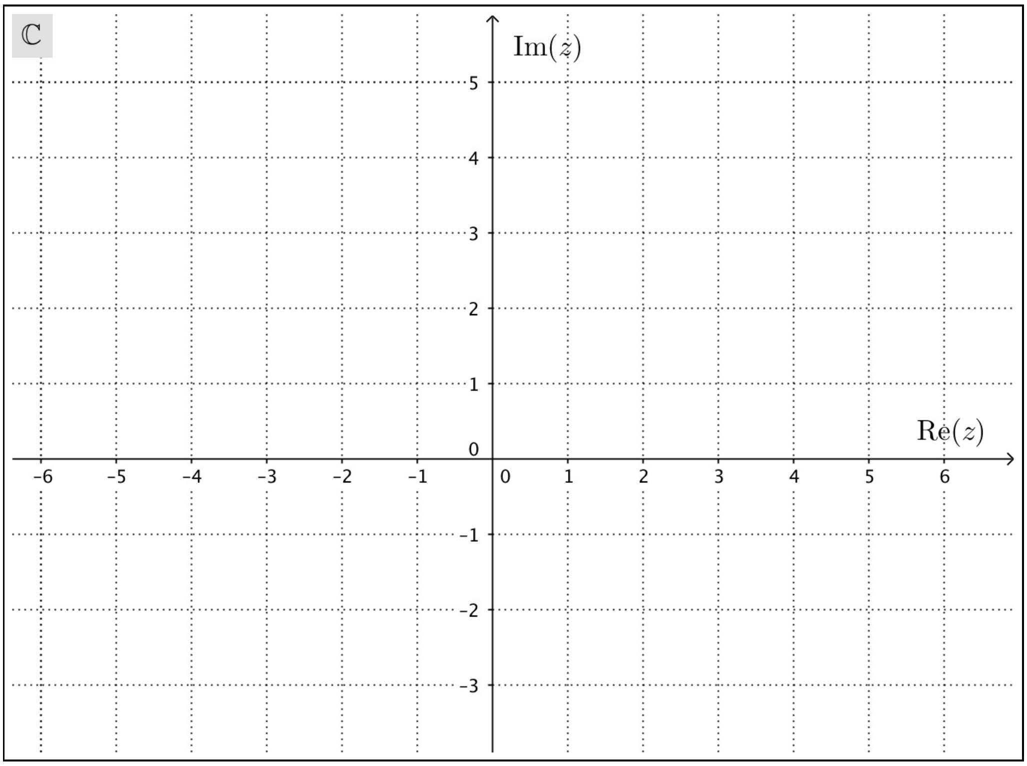
   i. $2 - 2\mathrm{i}$ ii. 3 iii. $-3\mathrm{i}$ iv. $-2 - 2\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

4. •• *Das Verständnis der Multiplikation und der Division im Komplexen*

   Gegeben seien die beiden Zahlen $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ und $z_2 = -\sqrt{6} + \sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

   (a) Berechne sowohl $z_1 \cdot z_2$, als auch $\frac{z_2}{z_1}$ in kartesischen Koordinaten.

   (b) Trage z_1 und z_2, sowie $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ als Punkte in der folgenden komplexen Ebene ein:



   (c) Rechne z_1 und z_2 in die Euler-Darstellung um und bestimme damit auch $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ in der Euler-Darstellung. (**Tipp:** $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.)

   (d) Beschreibe in Worten, was bei der Multiplikation $z_1 \cdot z_2$ und bei der Division $\frac{z_2}{z_1}$ mit den beiden Zahlen z_1 und z_2 in der komplexen Ebene "angestellt" wird.

   (e) Überzeuge dich davon, dass $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_2}{z_1}$ in der Summenschreibweise und in der Euler-Darstellung dasselbe Resultat ergeben.

   (f) Schliesslich: Wie lauten die exakten Werte für $\cos\frac{7\pi}{12}$ und $\sin\frac{7\pi}{12}$?

5. • *Verständnisschärfung für komplexe Zahlen der Form $e^{\mathrm{i}\varphi}$*

   (a) Für was für eine komplexe Zahl steht $e^{\mathrm{i}\varphi}$? Wo liegt sie in der komplexen Ebene? Welchen Betrag hat sie? Wo finden wir sie vom Ursprung aus gesehen?

   (b) Was passiert in der Gauss'schen Zahlenebene mit irgendeiner komplexen Zahl z, die mit der Zahl $e^{\mathrm{i}\varphi}$ multipliziert wird?