

Serie 1: Das Relativitätsprinzip – LÖSUNGEN

1. • Kurze rechnungsfreie Kontrollfragen

- (a) Z.B. könnte man sich einen Luftkissentisch im Auto vorstellen, auf dem eine Scheibe auf dem Luftkissen schwebt. Sie ist also horizontal in alle Richtungen reibungsfrei bewegbar.

Fährt das Auto gleichförmig geradeaus und schwebt die Scheibe in diesem Moment über einem bestimmten Punkt auf der Scheibe, so bleibt dies einfach so. In diesem Moment ist das Auto also ohne grossen Fehler ein Inertialsystem, denn im Autosystem ist die Scheibe kräftefrei (Gewichtskraft und Tragekraft des Luftkissens sind im Gleichgewicht) und gleichzeitig in Ruhe (= Spezialfall der gleichförmigen geradlinigen Bewegung).

Fährt das Auto nun z.B. durch eine Linkskurve, so wird sich die Scheibe von der Strasse aus gesehen weiter geradeaus bewegen. Im Autosystem hingegen wird die Scheibe nach rechts beschleunigt. Sie ist aber nach wie vor kräftefrei – am Kräftegleichgewicht hat sich nichts geändert. Damit gilt das Trägheitsprinzip im Autosystem nicht mehr und folglich ist es kein Inertialsystem mehr.

- (b) Die Standardorientierung ist der einfachst mögliche Fall, wie zwei relativ zueinander bewegende Inertialsysteme S und S' angeordnet sein können. Für sie gilt:

- Die x -Achse ist parallel zur x' -Achse, die y -Achse ist parallel zur y' -Achse, die z -Achse ist parallel zur z' -Achse.
- Diese Achsenparallelitäten bleiben erhalten. Es gibt also keine Rotation (ansonsten wäre sowieso mindestens eines der beiden Systeme kein Inertialsystem).
- Das System S' bewegt sich aus der Sicht des Systems S mit der Geschwindigkeit v längs der x -Achse.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ fallen die örtlichen Nullpunkte der beiden Systeme zusammen. Zudem ist dies auch der Moment, wo $t' = 0$ ist. D.h. also, dass das Ereignis "beide Ursprünge fallen zusammen" in beiden Systemen die vierdimensionalen Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ aufweist.

Mit diesen Vorgaben gilt in der Klassischen Mechanik die Galilei-Transformation für die Umrechnung der Koordinaten vom einen ins andere System:

$$t' = t \quad x' = x - vt \quad y' = y \quad z' = z$$

- (c) Wir verstehen: In den verschiedenen Bezugssystemen – einmal im Flugzeugsystem (links) und einmal im Bodensystem (rechts) – sieht derselbe Bewegungsablauf des Balls anders aus. Die Bewegung ist also relativ (und nicht absolut), d.h. vom Bezugssystem abhängig. In beiden Inertialsystemen gelten aber dieselben physikalischen Gesetze, für unseren Ball namentlich das Aktionsprinzip der Newton'schen Mechanik. Dieses Gesetz ist absolut, was der Kernaussage des Relativitätsprinzips entspricht.

Noch konkreter: Ja, es gibt offensichtlich Unterschiede zwischen der Betrachtung des Vorgangs im Flugzeug- und im Bodensystem. Im Flugzeugsystem hat der Ball eine Anfangsgeschwindigkeit senkrecht nach oben (nach dem Abwurf aus der Hand des Menschen), währenddem die Anfangsgeschwindigkeit aus Sicht des Bodens zusätzlich eine horizontale Komponente (in Flugrichtung) beinhaltet. Hingegen ist das Gesetz, nach dem sich diese Bewegung weiter entwickelt, in beiden Systemen dasselbe. In beiden Systemen wirkt auf den Ball nur die Gewichtskraft F_G senkrecht nach unten, die die resultierende Kraft ausmacht. Gemäss dem nun eben in beiden Systemen gleichermassen gültigen Aktionsprinzip der Newton'schen Mechanik erfährt der Ball in beiden Systemen eine Beschleunigung nach unten, deren Auswirkung im Flugzeugsystem den senkrechten Wurf, im Bodensystem den schiefen Wurf bewirkt.

Kurz: Die Flugbahn des Balls sieht im Flugzeugsystem anders aus als vom Boden aus betrachtet, aber in beiden Systemen ist es die Gewichtskraft und das Aktionsprinzip, die festlegen, wie der Flug des Balls abläuft.

- (d) **Wahr!** Da sich der Zustand des “in Ruhe Seins” nur relativ zu einem Bezugsobjekt angeben lässt, kann dem Begriff der Ruhe tatsächlich keine absolute Bedeutung zukommen.
- (e) i. **Falsch!** Bewegt sich ein Objekt in einem Bezugssystem, so ist es in seinem Eigensystem in Ruhe. Folglich muss es in diesen beiden Systemen eine verschieden grosse kinetische Energie aufweisen ($E_{\text{kin}} = \frac{mv^2}{2}$).
- ii. **Wahr!** Die Energieerhaltung ist ein physikalisches Prinzip, das in jedem Inertialsystem gültig ist. Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems bleibt bei jedem beliebigen Vorgang erhalten.
Die konkreten Energiewerte mögen aber von Bezugssystem zu Bezugssystem verschieden sein.

2. • Kleine Rechenaufgaben zur klassischen Geschwindigkeitstransformation

- (a) i. Im System von Boot 1 hat Boot 2 eine Geschwindigkeit von $3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
Umgekehrt hat Boot 1 im System von Boot 2 eine Geschwindigkeit von $-8.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- ii. Von Boot 1 aus gesehen beträgt die Wassergeschwindigkeit $3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, im System von Boot 2 sind es $-5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- iii. Auf Boot 1 ist die Rückwärtsrichtung die Ostrichtung, da es selber nach Westen fährt. Im Wassersystem hat der Ball folglich eine Geschwindigkeit von $-3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 7.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3.8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Und aus der Sicht von Boot 2 beträgt die Ballgeschwindigkeit $-8.4 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 7.2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = -1.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.
- (b) Gemäss der Galilei'schen Geschwindigkeitstransformation müssen die Geschwindigkeiten von Zug und Minibar addiert werden. Es folgt somit (c = Lichtgeschwindigkeit):

$$\text{i. } u = v + u' = 0.8c - 0.6c = 0.2c = 20\%c$$

$$\text{ii. } u = v + u' = 0.8c + 0.6c = 1.4c = 140\%c$$

Bewegt sich die Minibar im Zug vorwärts, so ist sie aus Sicht der Schienen also schneller als Licht, wenn wir der Galilei-Transformation vertrauen können.

3. •• Ereignisse in verschiedenen Bezugssystemen

- (a) Die geschilderte Situation entspricht der Standardorientierung zweier sich relativ zueinander bewegender Inertialsysteme. Im Schienensystem S bewegt sich das Zugsystem S' mit der Geschwindigkeit $v = 126 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in x -Richtung.

Die Koordinaten des Ereignisses A “Betätigung der Zugpfeife” lauten im Zugsystem S' natürlich $(t', x', y', z') = (12 \text{ s}, 120 \text{ m}, 0, 0)$, wobei wir die y' - und die z' -Koordinate ebenso gut weglassen können, denn für alle unsere Ereignisse werden diese Koordinaten gleich 0 sein.

Wir benutzen nun die Galilei-Rücktransformation, um diese Koordinaten ins Schienensystem S umzurechnen:

$$t = t' = 12 \text{ s} \quad \text{und} \quad x = x' + v \cdot t' = 120 \text{ m} + 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 12 \text{ s} = 120 \text{ m} + 420 \text{ m} = 540 \text{ m}$$

Somit hat das Ereignis A im Schienensystem die Koordinaten $(t, x) = (12 \text{ s}, 540 \text{ m})$.

- (b) Im Schienensystem S sind die Koordinaten des Ereignisses B “Alter Herr betritt unbewachten Bahnübergang” bereits angegeben: $(t, x) = (10 \text{ s}, 750 \text{ m})$.

Mittels Galilei-Transformation wechseln wir ins Zugsystem S' :

$$t' = t = 10 \text{ s} \quad \text{und} \quad x' = x - v \cdot t = 750 \text{ m} - 35 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s} = 750 \text{ m} - 350 \text{ m} = 400 \text{ m}$$

Damit lauten die Koordinaten von B im Zugsystem $(t', x') = (10 \text{ s}, 400 \text{ m})$.

4. ∞ Erste Schritte mit Taylor-Polynomen bei einer kubischen Funktion

- (a) Zur Bestimmung von Horizontal- und Wendestellen leiten wir $f(x)$ zweimal ab und setzen die erste und die zweite Ableitung je gleich 0:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 &\Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \\ &\Rightarrow f''(x) = 2x - 4 = 2(x-2) \end{aligned}$$

Die Wendestelle ist $x_1 = 2$, währenddem die Minimalstelle $x_2 = 3$ sein muss, wenn wir uns überlegen, dass der G_f aufgrund des Vorfaktors von x^3 aus dem negativ Unendlichen kommen und ins positiv Unendliche gehen muss.

Wir setzen diese Stellen in $f(x)$ ein und erhalten für den Wendepunkt W und den Tiefpunkt T :

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(2) &= \frac{8}{3} - 8 + 6 + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{W\left(2, \frac{5}{3}\right)}} \\ f(x_2) = f(3) &= 9 - 18 + 9 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{T(3, 1)}} \end{aligned}$$

(Der lokale Hochpunkt wäre $\underline{\underline{H(1, \frac{7}{3})}}$.)

- (b) Wir berechnen zuerst die ersten Ableitungen in W und T :

$$f'(x_1) = f'(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \quad \text{und} \quad f'(x_2) = f'(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 3 = 0$$

Damit können wir die Linearisierungen notieren:

$$\begin{aligned} \text{in } W: \quad t_1(x) &= f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) = \frac{5}{3} + (-1) \cdot (x - 2) = -x + \underline{\underline{\frac{11}{3}}} \\ \text{in } T: \quad t_2(x) &= f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_2) = 1 + 0 \cdot (x - 2) = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Natürlich beschreibt die Linearisierung im Tiefpunkt T eine *Horizontale*, denn die Steigung des G_f muss im Tiefpunkt ja 0 sein. Die Tangente muss dort eine Horizontale sein.

Die Grafik mit den beiden Tangenten ist am Ende der gesamten Aufgabe gezeigt.

- (c) Die zweite Ableitung an der Stelle $x_2 = 2$ ergibt 0, denn hier handelt es sich ja um eine Wendestelle. Die zweite Ableitung im Tiefpunkt ist sicher positiv, eben weil es sich um einen Tiefpunkt handelt, den genauen Wert müssen wir allerdings berechnen:

$$f''(x_2) = f''(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$$

Für die beiden Quadratisierungen folgt:

$$\begin{aligned} \text{in } W: \quad q_1(x) &= f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f''(x_1) \cdot \frac{(x - x_1)^2}{2!} \\ &= \frac{5}{3} + (-1) \cdot (x - 2) + 0 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} = -x + \underline{\underline{\frac{11}{3}}} \\ \text{in } T: \quad q_2(x) &= f(x_2) + f'(x_2) \cdot (x - x_2) + f''(x_2) \cdot \frac{(x - x_2)^2}{2!} \\ &= 1 + 0 \cdot (x - 2) + 2 \cdot \frac{(x - 3)^2}{2} = \underline{\underline{x^2 - 6x + 10}} \end{aligned}$$

Beim Versuch die kubische Funktion in ihrem Wendepunkt zu quadratisieren entsteht kein quadratisches Glied, weil die Krümmung des G_f in diesem Wendepunkt 0 ist. Der Wendepunkt ist eben genau der Übergang von einer negativen Krümmung ($\approx$ nach unten offene Parabel) zu einer positiven Krümmung ($\approx$ nach oben offene Parabel). Als Konsequenz ist die Quadratisierung in W immer noch gleich der Linearisierung in diesem Punkt.

(d) Zur Kubisierung wird die dritte Ableitung benötigt. Diese lautet:

$$f''(x) = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad f'''(x) = 2 = \text{konstant!}$$

Wir bemerken schonmal, dass die vierte und alle weiteren Ableitungen gleich 0 sind!

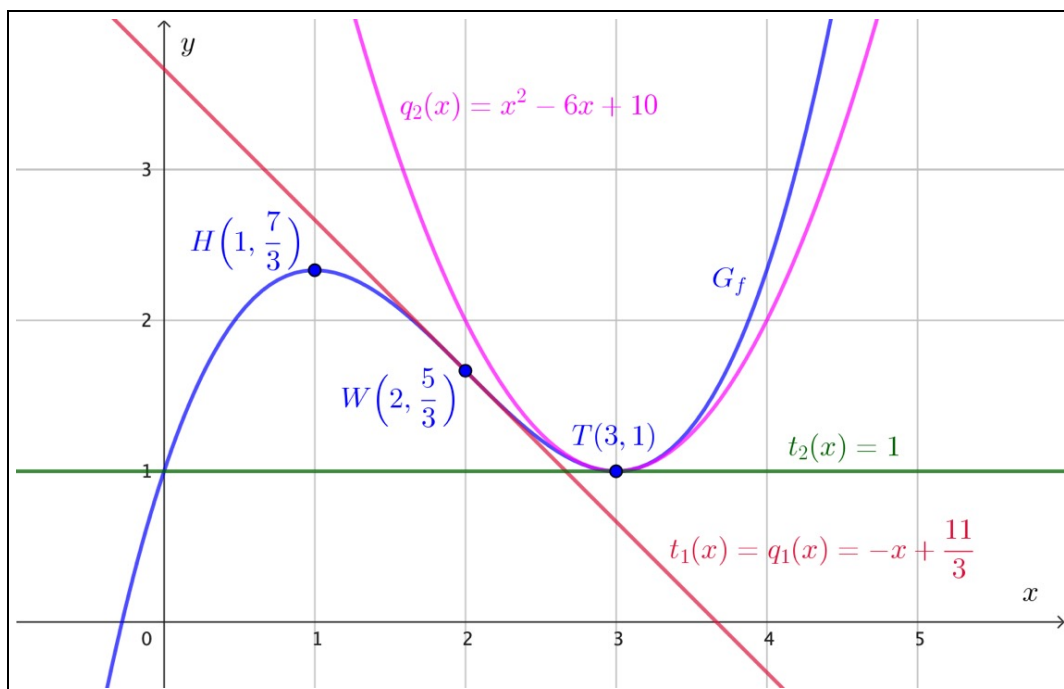
Nun kubisieren wir im Wendepunkt:

$$\begin{aligned} k_1(x) &= f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x - x_1) + f''(x_1) \cdot \frac{(x - x_1)^2}{2!} + f'''(x_1) \cdot \frac{(x - x_1)^3}{3!} \\ &= \frac{5}{3} + (-1) \cdot (x - 2) + 0 \cdot \frac{(x - 2)^2}{2} + 2 \cdot \frac{(x - 2)^3}{6} \\ &= -x + \frac{11}{3} + \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{3} = -x + \frac{11}{3} + \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - \frac{8}{3} \\ &= \underline{\underline{\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1 = f(x) \quad !!!}} \end{aligned}$$

Überraschung: Die Kubisierung unserer Funktion $f(x)$ ergibt wieder die Funktion $f(x)$!

Denken wir über dieses Resultat etwas nach, ist die Überraschung aber vielleicht gar nicht mehr so gross. Die Entwicklung in eine Taylor-Reihe steht ja für den Versuch, irgendeine Funktion $f(x)$ durch eine Summe von Potenzen von $(x - x_0)$ resp. (nach dem Ausmultiplizieren und Zusammenfassen) durch eine Summe von Potenzen von x anzunähern. Wenn aber unsere Funktion $f(x)$, die wir entwickeln wollen, selber eine kubische Funktion ist, dann muss dieser Versuch mit den ersten paar Gliedern der Taylor-Entwicklung (bis zu $n = 3$) bereits zum vollständigen Erfolg führen. Das ist bei allen Polynomen so, die wir auf diese Weise entwickeln. Jedes Polynom vom Grad ist ja eben bereits eine Summe von Potenzen von x bis zur Potenz x^n . Die Taylor-Entwicklung muss daher nach endlich vielen Schritten wieder das ursprüngliche Polynom ausspucken. Dazu passt auch die Feststellung, dass die vierte und alle weiteren Ableitungen unserer kubischen Funktion 0 ergeben würden. Für die Taylor-Entwicklung bedeutet dies nichts anderes als ein Abbruch in dem Moment, wo eben die vierte Ableitung ins Spiel kommt.

Selbstverständlich ergibt auch die Kubisierung im Tiefpunkt T wieder die Funktion $f(x)$ selber!



5. ◦ Weitere Taylor-Entwicklungen

Bei manchen Aufgaben kommen die Produkt-, die Quotienten- und die Kettenregel zum Einsatz:

Produktregel: $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kettenregel: $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

(a) Für die erste und die zweite Ableitung der betrachteten Funktion folgt:

$$\begin{aligned} f(x) = x \cdot e^{2-x} &\Rightarrow f'(x) = 1 \cdot e^{2-x} + x \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (1-x) \cdot e^{2-x} \\ &\Rightarrow f''(x) = (-1) \cdot e^{2-x} + (1-x) \cdot e^{2-x} \cdot (-1) = (x-2) \cdot e^{2-x} \end{aligned}$$

Da e^{2-x} stets > 0 ist, gibt es nur eine einzige Wendestelle bei $x_0 = 2$. Diese Stelle setzen wir in $f(x)$ und in $f'(x)$ ein, um den Wendepunkt und die dort vorliegende Steigung zu erhalten:

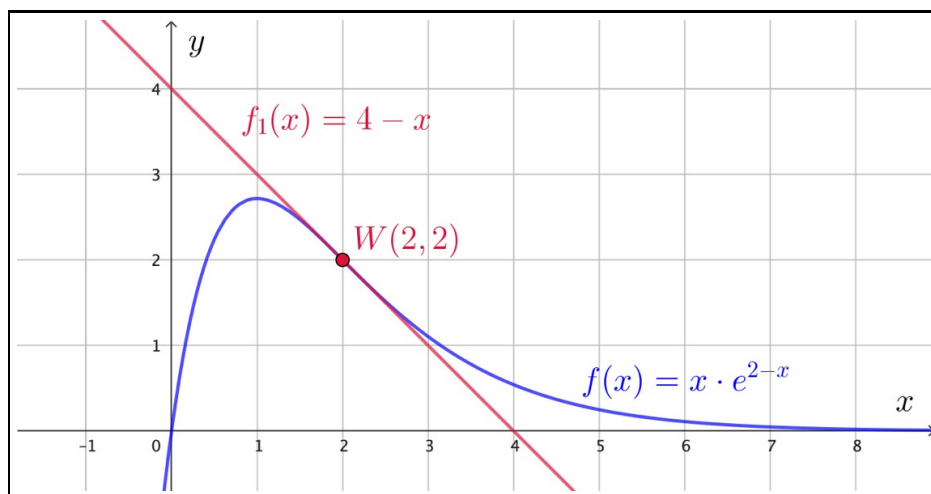
$$f(x_0) = f(2) = 2 \cdot e^{2-2} = 2 \Rightarrow W(2, 2)$$

$$f'(x_0) = f'(2) = (1-2) \cdot e^{2-2} = -1$$

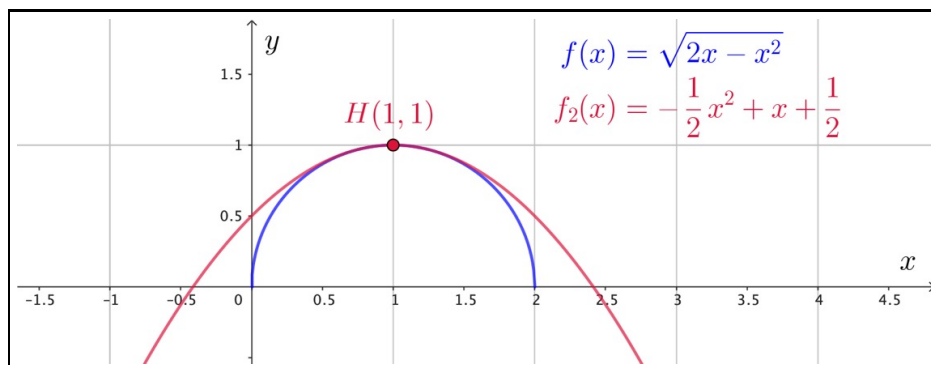
Nun können wir direkt die gesuchte Linearisierung notieren:

$$f_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = 2 - 1(x - 2) = \underline{\underline{-x + 4}}$$

Grafisch sieht die Sache wie folgt aus:



(b) Wir beginnen hier mit dem Graphen:



Natürlich habe ich hier bereits das Resultat der nachfolgenden Quadratisierungsrechnung eingetragen. Wir sehen, wie gut die Halbkreisfunktion $f(x)$ in der Umgebung des Hochpunktes $H(1, 1)$ durch diese Quadratisierung (Parabel zu $f_2(x)$) approximiert wird.

Nun wollen wir diese Quadratisierung aber noch rechnerisch bestimmen:

$$\begin{aligned}
 f(x) = \sqrt{2x - x^2} &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}} \cdot (2 - 2x) = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}} \\
 \Rightarrow f''(x) &= \frac{(-1) \cdot \sqrt{2x - x^2} - (1 - x) \cdot \frac{1-x}{\sqrt{2x - x^2}}}{\sqrt{2x - x^2}^2} = \frac{(-1) \cdot (2x - x^2) - (1 - x)^2}{\sqrt{2x - x^2}^3} \\
 &= \frac{-2x + x^2 - 1 + 2x - x^2}{\sqrt{2x - x^2}^3} = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}^3}
 \end{aligned}$$

Aus $f'(x) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $x_0 = 1$ als einzige Horizontalstelle. Diese setzen wir in $f(x)$ und $f''(x)$ ein:

$$f(1) = \sqrt{2 \cdot 1 - 1^2} = 1 \quad \text{und} \quad f''(1) = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 1 - 1^2}^3} = -1$$

Nun schreiben wir für die Quadratisierung im Hochpunkt:

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} \\
 &= 1 + 0 \cdot (x - 1) - 1 \cdot \frac{(x - 1)^2}{2} = 1 - \frac{x^2 - 2x + 1}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

- (c) Die erste positive Nullstelle der Cosinusfunktion liegt bei $x_0 = \frac{\pi}{2}$ vor.

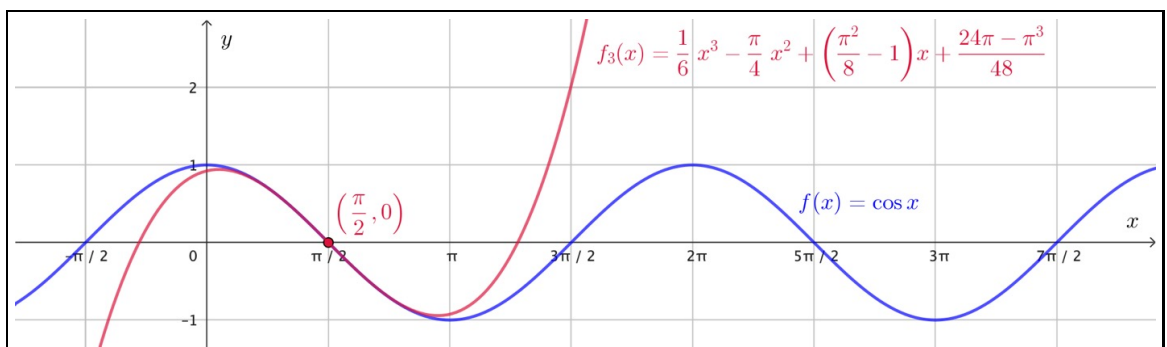
Für die Kubisierung starten wir mit den ersten drei Ableitungen von $\cos x$ und setzen jeweils gerade die Stelle $x_0 = \frac{\pi}{2}$ ein:

$$\begin{aligned}
 f(x) = \cos x &\Rightarrow f'(x) = -\sin x \quad \text{mit} \quad f'(x_0) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \frac{\pi}{2} = -1 \\
 &\Rightarrow f''(x) = -\cos x \quad \text{mit} \quad f''(x_0) = f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos \frac{\pi}{2} = 0 \\
 &\Rightarrow f'''(x) = \sin x \quad \text{mit} \quad f'''(x_0) = f'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1
 \end{aligned}$$

Damit haben wir bereits alles beisammen, um die Kubisierung in $x_0 = \frac{\pi}{2}$ vorzunehmen:

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{2!} + f'''(x_0) \cdot \frac{(x - x_0)^3}{3!} \\
 &= 0 - 1 \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + 1 \cdot \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} \\
 &= -x + \frac{\pi}{2} + \frac{x^3 - \frac{3\pi x^2}{2} + \frac{3\pi^2 x}{4} - \frac{\pi^3}{8}}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}x^3 - \frac{\pi}{4}x^2 + \left(\frac{\pi^2}{8} - 1\right)x + \frac{24\pi - \pi^3}{48}}}
 \end{aligned}$$

So kompliziert nun diese Kubisierungsfunktion aussieht, so gut approximiert sie doch die Cosinusfunktion im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)$, wie uns die folgende Grafik zeigt:



6. Die Potenzreihen von Sinus- und Cosinusfunktion

- (a) Ich zeige am Beispiel der Sinusfunktion ausführlich vor, wie wir die Potenzreihe erhalten. Bei der Cosinusfunktion geht das dann ganz genau gleich.

Zunächst benötigen wir die ersten paar Ableitungen und ihre Wert bei $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &\Rightarrow f'(x) = \cos x \Rightarrow f''(x) = -\sin x \Rightarrow f'''(x) = -\cos x \\ &\Rightarrow f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(5)}(x) = \cos x \Rightarrow \text{etc.} \\ \Rightarrow f(0) = 0 &\quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 0 \quad f'''(0) = -1 \quad f^{(4)}(0) = 0 \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

Damit schreiben wir für die Potenzreihe der Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \cdot \frac{x^0}{0!} + 1 \cdot \frac{x^1}{1!} + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1 \cdot \frac{x^3}{3!} + 0 \cdot \frac{x^4}{4!} + 1 \cdot \frac{x^5}{5!} + 0 \cdot \frac{x^6}{6!} - 1 \cdot \frac{x^7}{7!} + \dots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} - \dots \end{aligned}$$

Wir sehen, wie das Wirken der höheren Potenzen für relativ kleine Variablenbeträge $|x|$ durch die grossen Werte der Fakultäten im Nenner unterdrückt wird. Brechen wir die Reihe bei der Potenz x^n ab, so wird diese höchste Potenz x^n mit zunehmendem x dann aber doch rasch grösser, sodass sie ab einem gewissen Punkt über das Verhalten der Summe dominiert. Dann strebt der Graph gegen $\pm\infty$ und die gute Approximierung der Sinusfunktion hört dort dann eben auf.

Bei der Cosinusfunktion erhalten wir auf die genau gleiche Weise:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \dots$$

Beide Potenzreihen möchten wir mit dem Summenzeichen notieren. Dazu überlegen wir uns zuerst, wie sich die Folgen der geraden Zahlen (inkl. 0) und der ungeraden Zahlen, sowie die Folge wechselnder Vorzeichen explizit notieren lassen:

$$\begin{aligned} \text{gerade Zahlen:} & \quad 0, 2, 4, 6, 8, \dots \Rightarrow a_k = 2k \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{ungerade Zahlen:} & \quad 1, 3, 5, 7, 9, \dots \Rightarrow a_k = 2k + 1 \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots \\ \text{Vorzeichenwechsel:} & \quad 1, -1, 1, -1, 1, \dots \Rightarrow a_k = (-1)^k \quad \text{mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Mit diesen Folgen lassen sich die Potenzreihen nun gut mit dem Summenzeichen notieren:

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \end{aligned}$$

- (b) Die Cosinusfunktion ist sogenannte *gerade*. Damit verbunden ist die Tatsache, dass ihr Graph symmetrisch zur y -Achse ist. Für alle solchen Geraden Funktionen gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

“Der Funktionswert an der Stelle $-x$ ist der gleiche wie an der Stelle $+x$.”

Aufgrund der geraden Exponenten sind auch x^2 , x^4 , x^6 , etc. gerade Funktionen. Das passt nun wunderbar. In der Potenzreihenentwicklung setzt sich die Cosinusfunktion also aus lauter geraden Funktionen zusammen. Keine dieser Funktionen bricht diese Symmetrie!

Die Sinusfunktion ist sogenannt *ungerade*. Ihr Graph ist punktsymmetrisch zum Ursprung $(0,0)$. Für alle ungeraden Funktionen gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

“Der Funktionswert an der Stelle $-x$ ist bis auf das Vorzeichen der gleiche wie an der Stelle $+x$.” Aufgrund der ungeraden Exponenten sind auch x , x^3 , x^5 , etc. ungerade Funktionen. Und auch hier stellen wir fest. In der Potenzreihenentwicklung der Sinusfunktion werden lauter ungerade Funktionen aufaddiert. Keine davon bricht also diese Punktsymmetrie zum Ursprung, sodass auch die Summe, also die Sinusfunktion, eben diese Symmetrie aufweist.

Werfen wir schliesslich noch einen Blick auf die Ableitungen. Potenzfunktionen lassen sich ja ungeheuer einfach ableiten. Das gilt folglich auch für Summen von Potenzfunktionen, also für unsere Potenzreihenentwicklungen von $\sin x$ und $\cos x$. Betrachten wir beispielsweise die Ableitung Sinusfunktion:

$$\sin' x = \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right]' = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} - \dots$$

An dieser Stelle denken wir kurz über die Fakultäten in den Nennern nach:

$$\text{Beispiel: } \frac{9}{9!} = \frac{\cancel{9}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8 \cdot \cancel{9}} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 8} = \frac{1}{8!} \Rightarrow \text{allgemein: } \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Somit schreiben wir für unsere Sinusableitung von oben:

$$\sin' x = 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \frac{9x^8}{9!} - \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \cos x \quad !!!$$

Tatsächlich sorgen die Fakultäten zusammen mit der Ableitungsregel für Potenzfunktionen beim Ableiten der Sinusfunktion genau dafür, dass die Cosinusfunktion entsteht. Das ist doch ganz einfach wunderbar – auch wenn es ja gar nicht anders sein kann!

Ebenso finden wir beim Ableiten der Potenzreihenentwicklung der Cosinusfunktion:

$$\begin{aligned} \cos' x &= \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right]' = 0 - \frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \frac{8x^7}{8!} - \dots \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots = - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) = -\sin x \quad !!! \end{aligned}$$

Selbstverständlich kann man diese Ableitungen auch direkt in der Summenschreibweise vornehmen:

$$\begin{aligned} \sin' x &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{[x^{2k+1}]'}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{(2k+1) \cdot x^{2k}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x \end{aligned}$$

Dabei habe ich erstens verwendet, dass die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Einzelableitungen ist (eine der allgemeinen Grundregeln zur Funktionsableitung). Dies erlaubt uns die Ableitung von aussen in die Summe hineinzunehmen.

Zweitens ist wiederum $\frac{2k+1}{(2k+1)!} = \frac{1}{(2k)!}$.

Ich überlasse es euch auch noch die Ableitung der Potenzreihenentwicklung der Cosinusfunktion in der Summenschreibweise vorzunehmen.