

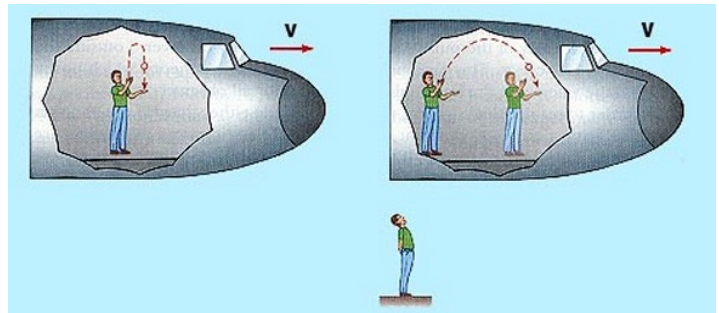
Serie 1: Das Relativitätsprinzip

- *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
 - *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
 - *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. • Kurze rechnungsfreie Kontrollfragen

Schreibe zu diesen Fragen keine langen Antworten auf. Manchmal genügt eine Skizze oder auch nur ein "Ja" oder "Nein". Es geht einfach darum, dass du dir selber die Sache überlegt hast.

- (a) Inertialsysteme sind *nicht-beschleunigte Bezugssysteme*. Wie können wir uns anhand eines (theoretischen) Versuches davon überzeugen, dass ein Auto in einer Kurve kein Inertialsystem ist?
- (b) Was verstehen wir unter der *Standardorientierung* zweier Inertialsysteme?
- (c) Erläutere das *Relativitätsprinzip* anhand der Grafik rechts.
- (d) Wahr oder falsch? Der Ausdruck *in Ruhe sein* hat in der Physik keine absolute Bedeutung.
- (e) Wahr oder falsch? Da die Gesetze der Physik in allen Inertialsystemen dieselben sein sollen, ...
 - i. müssen Objekte in allen Inertialsystemen dieselbe kinetische Energie aufweisen.
 - ii. muss die Energieerhaltung in allen Inertialsystemen gültig sein.



2. • Kleine Rechenaufgaben zur klassischen Geschwindigkeitstransformation

- (a) Ein Boot 1 (System S') fährt mit $3.4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ westwärts, Boot 2 (System S'') mit $5.0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ostwärts (Angaben relativ zum Wasser-System S). Alle drei Systeme haben ihre $x/x'/x''$ -Achse nach Osten.
 - i. Welche Geschwindigkeit weisen die Boote im Bezugssystem des jeweils anderen Bootes auf?
 - ii. Welche Geschwindigkeit hat das Wasser in den beiden Boot-Bezugssystemen?
 - iii. Auf Boot 1 wird ein Ball mit $7.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nach Osten von Bord geworfen. Welche Geschwindigkeit hat dieser Ball beim Abwurf aus der Sicht des Wassers resp. aus derjenigen von Boot 2?
- (b) Der Relativitätsexpress fährt mit 80 % der Lichtgeschwindigkeit an dir vorüber. Innerhalb des Zugs rast ein Serviceangestellter mit 60 % der Lichtgeschwindigkeit mit der Minibar durch den Gang. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich gemäss der Galilei-Transformation der Serviceangestellte relativ zu dir, wenn er sich innerhalb des Zugs i. rückwärts, ii. vorwärts bewegt?

3. • Ereignisse in verschiedenen Bezugssystemen

Ein Zug sei 120 m lang. Der Ursprung des Zugsystems S' sitze am Zugende ($x' = 0$). Der Ursprung des Schienensystems S befinde sich bei einem Signal ($x = 0$), an dem das Zugende zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ vorbeifährt. Der Zug ist mit $126 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ unterwegs.

- (a) Zum Zeitpunkt $t' = 12 \text{ s}$ betätige der Lokführer die Zugpfeife an der Zugspitze. Wie lauten die Koordinaten dieses Ereignisses im Zugsystem S' und im Schienensystem S ?
- (b) Zum Zeitpunkt $t = 10 \text{ s}$ betrete ein alter Herr einen unbewachten Bahnübergang bei $x = 750 \text{ m}$. Wie lauten die Koordinaten dieses Ereignisses in S und in S' ?

4. ○○ *Erste Schritte mit Taylor-Polynomen bei einer kubischen Funktion*

In dieser Aufgabe geht es darum erste Erfahrungen mit der Entwicklung einer Funktion in ein Taylor-Polynom zu sammeln. Wir repetieren kurz (vgl. Skript *Komplexe Zahlen*, Anhang A, S. 44):

Taylor-Polynom: Die Entwicklung einer beliebig oft differenzierbaren (= ableitbaren) Funktion $f(x)$ um eine bestimmte Stelle x_0 in ein *Taylor-Polynom* mit maximalem Grad n ist gegeben durch:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0) \cdot (x - x_0)^k}{k!} \quad (1)$$

Dabei bezeichnet $f^{(k)}(x)$ die k -te Ableitung von $f(x)$ und $k!$ (sprich: k -Fakultät) steht für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis k , also $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$ (mit $0! \equiv 1$).

Für $n = 1$ ergibt sich die *Linearisierung*, für $n = 2$ die *Quadratisierung* und für $n = 3$ die *Kubisierung* von $f(x)$ an der Stelle x_0 , wobei die Namen "Quadratisierung" und "Kubisierung" eher inoffiziellen Charakter besitzen.

Je grösser n ist, umso grösser ist die Umgebung der Stelle x_0 , über die hinweg die ursprüngliche Funktion $f(x)$ durch das Taylor-Polynom $f_n(x)$ gut approximiert (= angenähert) wird.

In dieser Aufgabe betrachten wir die kubische Funktion $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

- (a) Bestimme mittels Differentialrechnung die Extremal- und die Wendepunkte von $f(x)$.
- (b) x_1 bezeichne die *Wendestelle* und x_2 die *lokale Minimalstelle* von $f(x)$.
Gib die Linearisierungen von $f(x)$ um x_1 und x_2 an und lasse dir den Funktionsgraphen von $f(x)$ inklusive dieser Linearisierungen in GeoGebra aufzeichnen.
Was ist speziell an der Linearisierung um x_2 ? Und weshalb ist das so?
- (c) Bestimme ebenso die Quadratisierungen von $f(x)$ um x_1 und x_2 und gib sie ebenfalls in dein GeoGebra-File ein.
Was fällt auf bei der Quadratisierung um x_1 ? Warum kommt das so heraus?
- (d) Kubisiere nun noch $f(x)$ um x_1 und x_2 . Feststellung? Begründung?

5. ○ *Weitere Taylor-Entwicklungen*

- (a) Linearisiere die Funktion $f(x) = x \cdot e^{2-x}$ in ihrem Wendepunkt. (Produkt- und Kettenregel!)
- (b) Betrachte den Graphen der *Halbkreisfunktion* $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ in GeoGebra und bestimme ihre Quadratisierung im Maximum. (Ketten- und Quotientenregel!)
- (c) Kubisiere die Cosinusfunktion $\cos x$ (Winkel x im Bogenmass!) in ihrer ersten positiven Nullstelle.

6. ○○ *Die Potenzreihen von Sinus- und Cosinusfunktion*

Wenn wir die Taylor-Entwicklung um die Stelle $x_0 = 0$ ansetzen, so vereinfacht sich die Entwicklungsgleichung (1). Wir sprechen in diesem Fall von der *Potenzreihenentwicklung* von $f(x)$, weil nur noch einfache Potenzen von x (und nicht mehr von $(x - x_0)$) auftreten:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \quad (2)$$

Alle unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit der Zahl 0 in ihrem Definitionsbereich lassen sich damit als *Potenzreihe* schreiben.

- (a) Gib die Potenzreihenentwicklungen von $\sin x$ und $\cos x$ an. Dazu ermittelst du am besten zuerst die ersten fünf oder sechs Glieder ganz explizit. So verstehst du, wie "der Hase läuft" und kannst anschliessend die Reihe mittels Summenzeichen vermutlich leichter notieren.
- (b) Betrachte die beiden unter (a) erhaltenen Potenzreihen. Denke nun einerseits über die Symmetrien von $\sin x$ und $\cos x$ nach; verifiziere andererseits, dass $\sin' x = \cos x$ und dass $\cos' x = -\sin x$.