

Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 2: Zeitdilatation – LÖSUNGEN

1. •• Der Lorentzfaktor γ bei Alltagsgeschwindigkeiten (Näherung für kleine Geschwindigkeiten)

- (a) Bevor wir mit der Betrachtung von γ loslegen, machen wir uns klar, in welchem Wertebereich sich β bewegt. Da für ein Objekt mit Masse die Geschwindigkeit v niemals Lichtgeschwindigkeit sein kann, sondern im Prinzip nur beliebig nahe an die Lichtgeschwindigkeit herankommen kann, folgt, wenn wir für v auch negative Werte zulassen:

$$-c < v < c \quad \Rightarrow \quad -\frac{c}{c} < \frac{v}{c} < \frac{c}{c} \quad \Rightarrow \quad -1 < \beta < 1 \quad \text{oder kurz: } |\beta| < 1$$

- Für $v = 0$ ist auch $\beta = \frac{v}{c} = 0$ und wir erhalten für den Lorentzfaktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Sobald $v \neq 0$ und somit auch $\beta \neq 0$ ist, ist $\beta^2 > 0$. Damit gilt: $1 - \beta^2 < 1$ und somit auch $\sqrt{1 - \beta^2} < 1$. Im Lorentzfaktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ dividieren wir durch diese Wurzel, die im Falle von Bewegung eben eine Zahl zwischen 0 und 1 ist. Eine solche Division vergrößert den Wert des Bruchs. Es folgt: Für $v \neq 0$ ist $\gamma > 1$.

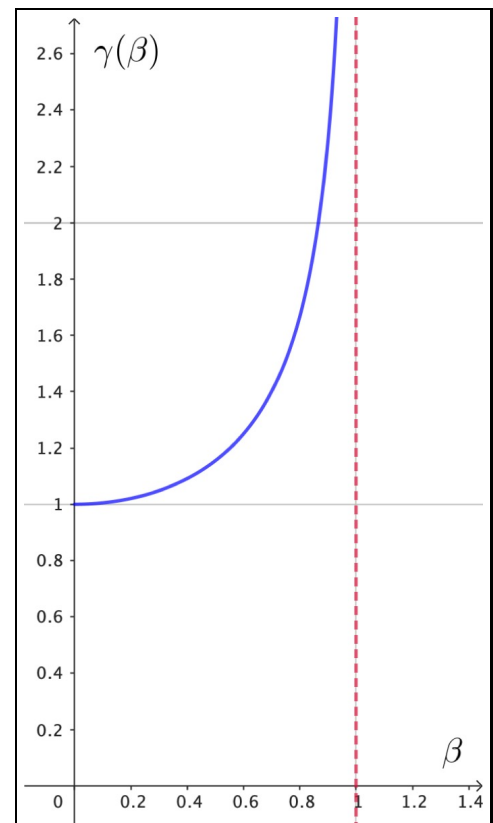
- Lassen wir umgekehrt die Geschwindigkeit v sehr gross werden, $|v| \rightarrow c$, so geht $|\beta|$ und somit auch β^2 gegen 1. Dann strebt $\sqrt{1 - \beta^2}$ gegen 0. Für $|v| \rightarrow c$ nähert sich also der Nenner des Lorentzfaktors immer mehr dem Wert 0 an, was den Wert von γ gegen $+\infty$ gehen lässt.

Halten wir zusammenfassend fest:

$$-c < v < c \quad \Leftrightarrow \quad -1 < \beta < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq \gamma < +\infty$$

- (b) Wir betrachten nun nur positive Geschwindigkeiten. Es sei also $v > 0$ und somit auch $\beta > 0$ ($\beta \in [0; 1]$). Rechts der Graph von $\gamma(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Bis zu $v = 20\% c$ ($\beta = 0.2$) entfernt sich γ fast nicht weg vom Wert 1. Danach "explodiert" der Verlauf allerdings sehr rasch und der Wert von γ strebt für $\beta \rightarrow 1$ gegen $+\infty$.



- (c) Mit dem TR ergeben sich die folgenden "Werte":

v	$\beta = \frac{v}{c}$	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (gem. TR)	$\gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\beta^2$
$v_1 = 300 \frac{\text{km}}{\text{s}}$	$\frac{1}{1000} = 0.001$	1.000 000 5	$0.000\,000\,5 = 5 \cdot 10^{-7}$
$v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$	$\frac{1}{10\,000} = 0.000\,1$	1.000 000 005	$5 \cdot 10^{-9}$
$v_3 = 3 \frac{\text{km}}{\text{s}}$	$\frac{1}{100\,000} = 0.000\,01$	1	$5 \cdot 10^{-11}$
$v_4 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{1}{1\,000\,000} = 0.000\,001$	1	$5 \cdot 10^{-13}$
$v_5 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\frac{1}{10\,000\,000} = 0.000\,000\,1$	1	$5 \cdot 10^{-15}$

Bei "geringen" Geschwindigkeitswerten ist der TR offensichtlich aufgrund seiner beschränkten Stellenanzahl nicht mehr in der Lage, den Lorentzfaktor korrekt zu berechnen. Er zeigt dann einfach den scheinbar exakten Wert 1 an, obwohl wir genau wissen, dass γ einen Unterschied zu 1 aufweisen muss.

- (d) Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir für die ersten beiden Ableitungen von $\gamma(x)$:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \gamma'(x) = -\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^3}}$$

$$\Rightarrow \gamma''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-1) = \frac{3}{4\sqrt{1-x^5}}$$

An der Stelle $x_0 = 0$ ergeben sich somit folgende Wert:

$$\gamma(x_0) = \gamma(0) = 1 \quad \gamma'(x_0) = \gamma'(0) = \frac{1}{2} \quad \gamma''(x_0) = \gamma''(0) = \frac{3}{4}$$

Damit folgt für die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung:

$$\gamma(x) \approx \gamma(x_0) + \gamma'(x_0) \cdot x + \frac{\gamma''(x_0)}{2!} x^2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 \quad \text{für } x \approx 0$$

Jetzt ersetzen wir x wieder durch β^2 resp. durch $\frac{v^2}{c^2}$ und erhalten so einen ersten Ausdruck zur Approximierung des Lorentzfaktors bei geringen Geschwindigkeiten:

$$\gamma(\beta) \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 \quad \text{für } \beta \approx 0 \quad \text{resp.} \quad \gamma(v) \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} \quad \text{für } v \ll c$$

- (e) Für $v \ll c$ resp. $\beta \approx 0$ der Bruch $\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$ extrem viel grösser als der Bruch $\beta^4 = \frac{v^4}{c^4}$. Das bedeutet, in obiger Approximierung können wir das dritte Glied ebenso gut einfach weglassen. In Zukunft verwenden wir somit den Ausdruck

$$\gamma \approx a(\beta) := 1 + \frac{1}{2}\beta^2 = 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \quad \text{für } \beta \approx 0 \quad \text{resp.} \quad v \ll c$$

zur Annäherung von γ bei kleinen Geschwindigkeiten.

- (f) In der Tabelle unter (c) habe ich die angenäherte Abweichung des Lorentzfaktors von 1 in der hintersten Spalte eingetragen. Diese Approximierung fällt offensichtlich nicht sonderlich schwer.
- (g) Oben auf der nächsten Seite sehen wir nochmals die Grafik mit der exakten Funktion $\gamma(\beta)$ und dem Graphen der Approximierung.

Es wird ersichtlich, dass die Approximierung für β -Werte bis etwa 30 % wirklich gut dem Verlauf von $\gamma(\beta)$ entspricht. Für $\beta > 0.3$ trennen sich dann die Graphen. Ab dann ist die Approximierung nicht mehr gut zu brauchen und wird auch "unphysikalisch", weil sie bei $\beta \geq 1$ immer noch wohldefiniert ist.

Merken wir uns nochmals: Die Approximierung $\gamma(\beta) \approx a(\beta) = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ ist für kleine Werte von β , ganz besonders für die ersten 10 %, extrem genau. Sie erlaubt uns die problemlose Berechnung der minimalen Abweichungen des Lorentzfaktors γ vom Wert 1 in diesem Geschwindigkeitsbereich.

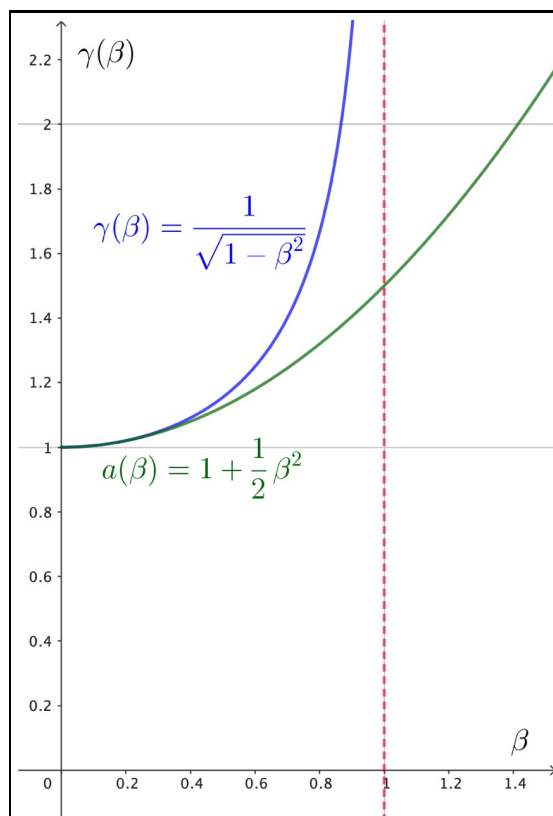
(h) Im Prinzip gibt es hier die Gleichung

$$\gamma(\beta) - a(\beta) = 0.001$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right) = 0.001$$

zu lösen. Das wäre algebraisch allerdings eine mühsame Angelegenheit und die formale Lösung würde uns keine besonders erhellenden neuen Erkenntnisse liefern. Wir lösen diese Gleichung daher rein numerisch unter Verwendung von GeoGebra. Das Programm stellt uns dazu ganz verschiedene Vorgehensweisen zur Verfügung, von denen ich hier nur eine beschreibe.

Im GeoGebra-File haben wir ja bereits die beiden Funktionen $\gamma(x)$ und $a(x)$ definiert. (In GeoGebra muss die Variable x heissen, nicht β , wenn uns das Programm zur Funktion einen Graphen in einem Koordinatensystem zeichnen soll.)



- Durch Eingabe des Ausdrucks $\gamma - a$ definieren wir die *Differenzfunktion* zwischen den beiden Funktionen. Zu jedem x resp. jedem β gibt sie uns den Unterschied zwischen dem exakten Lorentzfaktor γ und der Approximation a an. GeoGebra zeichnet uns auch sofort den Graphen zu dieser Differenzfunktion.
- Mit der Eingabe $y = 0.001$ erzeugen wir eine Horizontale auf der Höhe 0.001.
- Nun können wir nach dem Schnittpunkt des Graphen der Differenzfunktion und dieser Horizontale fragen. Angenommen, die Differenzfunktion hat den Namen d und die Horizontale den Namen h erhalten. So würde die Eingabe dafür **Schnittpunkt(d,h)** lauten. Sofort zeichnet uns GeoGebra diesen Schnittpunkt ins Diagramm ein.

Nun können wir die x - resp. β -Koordinate des Schnittpunktes ablesen: $\beta \approx 0.225$. Erst ab 22.5 % der Lichtgeschwindigkeit unterscheidet sich die Approximierung $a(x) = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ also um mehr als $\frac{1}{1000}$ vom exakten Lorentzfaktor γ .

2. •• Futuristische Lebensmittelkonservierung

Die Eigenzeit des "ungeniessbar Werdens im Kühlschrank" beträgt offenbar $\tau = 2$ Wochen. Dieser Vorgang soll durch die hohe Geschwindigkeit des Kühlschranks auf $t = 52$ Wochen gedehnt werden. Der dazu notwendige Lorentzfaktor beträgt:

$$\gamma = \frac{t}{\tau} = \frac{52 \text{ Wochen}}{2 \text{ Wochen}} = 26$$

Daraus schliessen wir auf die notwendige Geschwindigkeit des Kühlschranks:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2} \Rightarrow \frac{1}{\gamma^2} = 1-\beta^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2}$$

$$\Leftrightarrow |\beta| = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{26^2}} \approx 0.99926 = \underline{\underline{99.926 \%}}$$

Der Kühlschrank müsste sich also mit 99.926 % der Lichtgeschwindigkeit bewegen!

3. ◦ Nachberechnungen zur Theorie

- (a) Der Lorentzfaktor beträgt bei einer Relativgeschwindigkeit von $v = 0.6c = \frac{3}{5}c$ resp. $\beta = \frac{3}{5}$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Im System S ist die Zeit $t = 1$ ns verstrichen, das rechnen wir ins Eigensystem der Lichtuhr L' um:

$$t' = \frac{t}{\gamma} = \frac{t}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5} \cdot t = \frac{4}{5} \cdot 1 \text{ ns} = \underline{\underline{0.8 \text{ ns}}}$$

- (b) Der Lorentzfaktor beträgt immer noch $\gamma = \frac{5}{4}$. Entsprechend folgt bei der Zeit $t' = 1$ ns auf der sich bewegenden Lichtuhr L' :

$$t = \gamma \cdot t' = \frac{5}{4} \cdot 1 \text{ ns} = \frac{5}{4} \text{ ns} = 1.25 \text{ ns}$$

Die Strecke, die die Lichtuhr L' bis dahin zurückgelegt hat, beträgt:

$$x = v \cdot t = \frac{3}{5}c \cdot \frac{5}{4} \text{ ns} = \frac{3}{4}c \cdot \text{ns} = \frac{3}{4} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10^{-9} \text{ s} = \frac{9}{4} \cdot 10^{-1} \text{ m} = \frac{2.25 \text{ m}}{10} = \underline{\underline{22.5 \text{ cm}}}$$

4. ◦ Die Grösse der Lichtgeschwindigkeit

Bei der gleichmässig beschleunigten Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit gilt der einfache Zusammenhang $v = a \cdot t$, wobei a für die Beschleunigung steht und in unserer Aufgabe der Fallbeschleunigung entspricht. Wir folgern:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{c}{g} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 3 \cdot 10^7 \text{ s} = 8333 \text{ h} = 347 \text{ d} = 0.951 \text{ a} \approx \underline{\underline{1 \text{ Jahr}}}$$

Man müsste also etwa ein Jahr lang mit der Fallbeschleunigung g beschleunigen, um die Lichtgeschwindigkeit zu erreichen. Das macht klar, wie krass gross diese Lichtgeschwindigkeit c ist, denn – ich weiss nicht, wie es euch geht – mir scheint z.B. bereits die nach zwei Sekunden Fallzeit erreichte Geschwindigkeit (ca. $70 \frac{\text{km}}{\text{h}}$) beträchtlich.

5. • Weiteres zum Grundverständnis der SRT...

- (a) Wenn wir das Relativitätsprinzip und die Universalität der Lichtgeschwindigkeit ernst nehmen, so fällt die Antwort ganz leicht: **Der Läufer kann sich in seinem Spiegel ganz normal sehen**, denn in seinem Eigensystem ist der Spiegel in Ruhe und das Licht breitet sich – wie in jedem anderen Inertialsystem auch – mit $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aus. Die physikalischen Gesetze sind genau dieselben wie in jedem anderen System, also auch die Gesetze der Optik.
- (b) In dieser Aussage steckt das grundlegende Unverständnis für das Konzept der **Eigenzeit**! In meinem System erlebe ich das Verstreichen der Zeit stets genau gleich. Durch die Bewegung relativ zu anderen Objekten gewinne ich in meinem eigenen Bezugssystem in keiner Art und Weise Zeit für Vorgänge – auch nicht für das Lesen eines Buchs. Mein eigenes Erleben und Erfahren der Zeit läuft physikalisch immer gleich ab.

6. • Wissenschaftlicher Austausch zwischen den Welten

Zunächst berechne ich die Reisezeit des Raumschiffs im Planetensystem P :

$$t = \frac{s}{v} = \frac{57.2 \text{ c} \cdot \text{d}}{0.8 \text{ c}} = 71.5 \text{ d}$$

Nun bestimmen wir den Lorentzfaktor, mit dem die Zeit im Raumschiff im System P gedehnt wird:

$$\beta = 80\% = 0.8 = \frac{4}{5} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{25}}} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$$

Damit verlängert sich die Halbwertszeit von Phosphor-32 im Planetensystem auf:

$$T_{1/2} = \gamma \cdot T'_{1/2} = \frac{5}{3} \cdot 14.3 \text{ d} = 23.83 \text{ d}$$

Und somit folgt für den noch vorhandenen Anteil nach Ankunft auf Caprica gemäss Zerfallsgesetz:

$$N(t) = N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} \Rightarrow \frac{N(t)}{N_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{71.5 \text{ d}}{23.83 \text{ d}}} = 0.1250 = \underline{\underline{12.5\%}}$$

Natürlich hätten wir auch im Raumschiffsystem R rechnen können. Dann wäre die Reisezeit t , die ja zunächst im Planetensystem P berechnet wird, um den Faktor γ verkürzt worden ($t' = \frac{t}{\gamma} = 42.9 \text{ d}$). Die Halbwertszeit $T'_{1/2}$ wäre dann allerdings unverändert geblieben, denn für die Reise der Probe ist das Raumschiffsystem R ja auch das Eigensystem der Probe. Das Zerfallsgesetz gilt in gleicher Weise in P und in R (Relativitätsprinzip), sodass wir damit innerhalb von R ebenfalls den noch vorhandenen Anteil hätten bestimmen können.

Egal, in welchem System wir rechnen, im Exponenten des Zerfallsgesetzes kommt der Lorentzfaktor γ genau einmal vor: Im Planetensystem wird die Halbwertszeit $T'_{1/2}$ gedehnt, also $T_{1/2} = \gamma \cdot T'_{1/2}$, und der Exponent wird zu $\frac{t}{T_{1/2}} = \frac{t}{\gamma \cdot T'_{1/2}}$; arbeiten wir hingegen im Raumschiffsystem R , so wird die Reisezeit verkürzt, $t' = \frac{t}{\gamma}$, und der Exponent wird zu $\frac{t'}{T'_{1/2}} = \frac{t}{\gamma \cdot T'_{1/2}}$. In beiden Systemen ist somit der noch vorhandene Anteil der Probe gleich gross – alles andere wäre effektiv widersprüchlich!

7. • "TPV – Train à Petite Vitesse"

Auch wenn in unserem Alltag $v = 350 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 97.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ eine beträchtliche Geschwindigkeit darstellen, so haben wir es relativistisch gesehen mit einer sehr kleinen Geschwindigkeit zu tun $v \ll c$ resp. explizit: $\beta = \frac{v}{c} \approx 3.24 \cdot 10^{-7}$.

Wenn wir damit auf dem Taschenrechner den Lorentzfaktor γ zu berechnen versuchen, ergibt sich exakt der Wert 1, obwohl wir genau wissen, dass dies nicht zutrifft. Der Unterschied zu 1 wäre aber erst auf Nachkommastellen sichtbar, die uns der TR nicht mehr zeigen kann.

Uns interessiert nun aber genau dieser Unterschied! Um ihn beziffern zu können – auch mittels TR – müssen wir anstelle des exakten Lorentzfaktors mit dessen Taylorentwicklung arbeiten:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \beta^2 \quad \text{für } v \ll c \quad \text{resp. } \beta \approx 0$$

Im Zug soll aus Sicht des Bahnhofsystems S exakt die Zeit $t' = 15 \text{ min}$ verstreichen. Für die Zeit t , die währenddessen auf der Bahnhofsuhr vergeht, notieren wir nun mittels Taylorentwicklung:

$$t = \gamma \cdot t' \approx \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \cdot t' = t' + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \cdot t'$$

Jetzt können wir t' subtrahieren und erhalten so einen Ausdruck für die Zeitdifferenz, der sich gut berechnen lässt ($t' = 15 \text{ min} = 900 \text{ s}$):

$$t - t' \approx \frac{1}{2} \beta^2 \cdot t' = \frac{1}{2} \cdot (3.24 \cdot 10^{-7})^2 \cdot 900 \text{ s} = \underline{\underline{4.72 \cdot 10^{-11} \text{ s}}} = \underline{\underline{47.2 \text{ ps}}}$$

Der Zeitunterschied beträgt auf 15 Minuten also nur gerade 47 Picosekunden – von einem Wimpernschlag zu sprechen, wäre hier masslos übertrieben!