

Serie 2: Zeitdilatation

- *Basic* – Dinge, die du einfach gesehen und bearbeitet haben musst → **obligatorisch!**
- *Die Essenz* – zentrale Aufgabe für das grundlegende Verständnis → **obligatorisch!**
 - *Noch ein Beispiel* – Zusatzaufgabe mit weiterer Anwendung zur Vertiefung → **fakultativ!**
 - *Du willst es? Du kriegst es!* – längere, weiterführende Aufgabe mit neuen Inhalten → **fakultativ!**

1. •• *Der Lorentzfaktor γ bei Alltagsgeschwindigkeiten (Näherung für kleine Geschwindigkeiten)*

Überall in der SRT taucht der *Lorentzfaktor*

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{v}{c} \quad (1)$$

auf. Der betrachtete Körper bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v , die im Kontext der SRT sehr oft als Bruchteil β der Lichtgeschwindigkeit c angegeben wird. Ist die betrachtete Geschwindigkeit v einigermassen klein im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c , so schreiben wir kurz $v \ll c$ oder $\beta \approx 0$.

- (a) Verdeutliche dir zuerst, welche Werte der Lorentzfaktor γ überhaupt annehmen kann. Welchen Wert hat er für $v = 0$ und wohin strebt er für $v \rightarrow c$.
- (b) Fasse γ als Funktion von β auf, also $\gamma(\beta)$, und skizziere den Verlauf von γ in GeoGebra über dem Intervall $\beta \in [0; 1[$, also für Geschwindigkeiten von $v = 0$ bis $v \rightarrow c$.
- (c) Sobald sich ein Körper bewegt ($v \neq 0$ resp. $\beta \neq 0$), weicht γ von seinem Minimalwert 1 ab. Bei "geringen Geschwindigkeiten", wie wir sie bei sämtlichen Objekten unseres Alltags antreffen, sind diese Abweichungen aber extrem klein. Trotzdem möchten wir sie beziffern können. Leider scheitert die Berechnung von solchen γ -Werten mittels Taschenrechner... Versuche die Berechnung von γ unter Verwendung von (1) mit dem TR für die folgenden fünf Geschwindigkeitswerte:

$$v_1 = 300 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad v_2 = 30 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad v_3 = 3 \frac{\text{km}}{\text{s}} \quad v_4 = 300 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad v_5 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Verwende dabei $c = 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ und mache dir zuerst jeweils bewusst, welchen (einfachen) Wert β beim jeweiligen Geschwindigkeitswert v hat.

- (d) Allerdings möchten wir auch bei kleinen Geschwindigkeiten in der Lage sein zu beziffern, wie gross der Effekt der Relativitätstheorie ist. D.h., wir möchten zumindest ungefähr angeben können, wie stark γ für ein bestimmtes $v \ll c$ von 1 abweicht.

Genau diese Abweichung können wir exzellent approximieren, wenn wir den Lorentzfaktor in eine Potenzreihe entwickeln. Zunächst schreiben wir:

$$\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{mit} \quad x \equiv \beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \quad (2)$$

Bestimme die ersten drei Glieder der Potenzreihenentwicklung von $\gamma(x)$ und setze danach wieder β^2 resp. $\frac{v^2}{c^2}$ anstelle von x ein. (Potenzschreibweise für die Wurzel und Kettenregel beim Ableiten!)

- (e) Weshalb genügt bei der Approximierung des Lorentzfaktors für $v \ll c$ jeweils die Entwicklung bis zu $\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ und es werden keine Terme höherer Ordnung (mit β^4 , β^6 , etc.) benötigt?
- (f) Bestimme mit deinem Resultat aus (d) resp. (e) bei den unter (c) vorgegebenen Geschwindigkeiten die Abweichung des Lorentzfaktors vom Wert 1. Mache dies zum Vergleich auch bei den Geschwindigkeiten, wo Gleichung (1) mit dem TR funktioniert hatte.
- (g) Unter (b) hast du dir die Funktion $\gamma(\beta)$ in GeoGebra aufzeichnen lassen. Zeichne dort nun auch die Approximierung ein (nur bis zum Glied $\frac{1}{2}\beta^2$). (Nochmalige) Folgerung?!

- (h) Angenommen, wir möchten den Lorentzfaktor jeweils auf ± 0.001 genau kennen.
 Ab welcher Geschwindigkeit β müssen wir dann unbedingt mit der exakten Formel (1) anstelle der Approximierung $\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2$ rechnen?
 Benutze zur Beantwortung dieser Frage dein GeoGebra-File! (GeoGebra kann Schnittpunkte bestimmen und auch Gleichungen lösen!)

2. ●● *Futuristische Lebensmittelkonservierung*

Ein Joghurt ist im Kühlschrank 2 Wochen nach seiner Herstellung ungeniessbar geworden. Wie schnell müsste man den Kühlschrank samt Joghurt herumfliegen lassen, damit das Joghurt stattdessen erst nach einem Jahr (= 52 Wochen) ungeniessbar wird?

3. ○ *Nachberechnungen zur Theorie*

- (a) Im Text zur Herleitung der Zeitdilatation haben wir bei ii. den Zeitpunkt $t = 1 \text{ ns}$ betrachtet. Welche Uhrzeit hätte dort für t' angegeben sein können?
 (b) Bei iii. wurde ohne Begründung behauptet, dass im S -System die Zeit $t = 1.25 \text{ ns}$ erreicht ist. Zeige, dass dies zutrifft und dass die Lichtuhr L' dann tatsächlich bei $x = 22.5 \text{ cm}$ vorbeikommt.

4. ○ *Die Grösse der Lichtgeschwindigkeit*

7.5-mal um die Erde in einer Sekunde – Ja, so ungeheuer gross ist die Lichtgeschwindigkeit! Hier aber noch eine andere Verdeutlichung zum Wert von c ...

Angenommen, wir könnten einen Stein fallen lassen und er würde dann beliebig lange mit der Fallbeschleunigung von $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ beschleunigen. Wie lange müssten wir warten, bis er Lichtgeschwindigkeit erreicht hat? Gib das Resultat in einer anschaulichen Zeiteinheit an!

5. ● *Weiteres zum Grundverständnis der SRT...*

- (a) *Prinzipielles*: Einstein beschäftigte sich in seiner Jugend unter anderem mit folgendem Problem:
 Ein Läufer betrachtet sich in einem Spiegel, den er vor sich her trägt.
 Wie sieht sich der Läufer im Spiegel, wenn er fast mit Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist?
 (b) *Zeitdilatation*: "Wenn ich in einem sehr schnellen Zug ein Buch lese, so unterliege ich der Zeitdilatation und habe daher mehr Zeit für meine Lektüre."
 Wo liegt der Verständnisfehler in diesem Gedankengang?

6. ● *Wissenschaftlicher Austausch zwischen den Welten*

Eine ausserirdische Zivilisation lebe auf ihren beiden Heimplaneten *Caprica* und *Kobol*, welche relativ zueinander ruhen und in ihrem Eigensystem einen Abstand von 57.2 Lichttagen aufweisen. Die ausserirdischen Wissenschaftler haben bereits früh fantastische Fortschritte in der Raumfahrttechnik erzielt, dafür aber erst kürzlich die Radioaktivität entdeckt...

Ein Wissenschaftler auf *Kobol* möchte seinem Kollegen auf *Caprica* eine Probe P-32 zustellen. Er hat in seinem Labor bereits die Halbwertszeit dieses Phosphor-Isotops ermittelt: 14.3 Tage.

Welchen Prozentsatz der ursprünglichen Probe erhält der Kollege auf *Caprica* noch im unzerfallenen Zustand, wenn das Transportraumschiff im System der Planeten konstant mit 80 % der Lichtgeschwindigkeit unterwegs ist?

7. ● *"TPV – Train à Petite Vitesse"*

Der TGV – Train à Grande Vitesse – fährt mit einer Reisegeschwindigkeit von $350 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ an einem Bahnhof vorbei. Wie viel Zeit **mehr** vergeht aus der Perspektive des Bahnhofsvorstehers auf der Bahnhofsuhr, wenn aus seiner Sicht auf der Borduhr des Zuges genau 15 min verstreichen?

Tip: Benutze die in Aufgabe 1 entwickelte Approximation für den Lorentzfaktor γ .