Übungen zum physikalischen Ergänzungsfach

Serie 7: Die Summenschreibweise komplexer Zahlen – LÖSUNGEN

1. • *Elementares Rechnen mit komplexen Zahlen*

   Mit $z_1 = 3 - 4\mathrm{i}$, $z_2 = 2 + \mathrm{i}$ und $z_3 = 8\mathrm{i}$ ergeben die sechs Rechnungen:

   i. $z_1 - 4z_2 + z_3 = 3 - 4\mathrm{i} - 4(2+) + 8\mathrm{i} = 3 - 4\mathrm{i} - 8 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i} = -5 + 0\mathrm{i} = -5$

   ii. $2z_2 - (8z_2 + \mathrm{i}z_3) = 2(2+\mathrm{i}) - \big(8(2+\mathrm{i}) + \mathrm{i}(8\mathrm{i})\big) = 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2) =$
   $= 4 + 2\mathrm{i} - (16 + 8\mathrm{i} - 8) = 4 + 2\mathrm{i} - 16 - 8\mathrm{i} + 8 = -4 - 6\mathrm{i}$

   iii. $z_1 z_2 z_3 = (3 - 4\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} - 4\mathrm{i}^2) \cdot 8\mathrm{i} = (6 + 3\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 4) \cdot 8\mathrm{i}$
   $= (10 - 5\mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i} = 80\mathrm{i} - 40\mathrm{i}^2 = 40 + 80\mathrm{i}$

   iv. $z_1^2 + z_2^2 = (3 - 4\mathrm{i})^2 + (2 + \mathrm{i})^2 = 9 - 24\mathrm{i} + 16\mathrm{i}^2 + 4 + 4\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$
   $= 9 - 24\mathrm{i} - 16 + 4 + 4\mathrm{i} - 1 = -4 - 20\mathrm{i}$

   v. $\mathrm{Re}(z_1 + z_3) = \mathrm{Re}(3 - 4\mathrm{i} + 8\mathrm{i}) = \mathrm{Re}(3 + 4\mathrm{i}) = 3$

   vi. $\mathrm{Im}(z_2 z_3) = \mathrm{Im}\big((2 + \mathrm{i}) \cdot 8\mathrm{i}\big) = \mathrm{Im}\big(16\mathrm{i} + 8\mathrm{i}^2\big) = \mathrm{Im}(16\mathrm{i} - 8) = 16$

2. • *Konjugiert Komplexes, Betrag und Kehrwert einer komplexen Zahl*

   (a) $z_1 = 2 + \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_1^* = 2 - \mathrm{i} \qquad |z_1| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad z_1^{-1} = \dfrac{z_1^*}{|z_1|^2} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}\,\mathrm{i}$

   (b) $z_2 = 4 - 3\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_2^* = 4 + 3\mathrm{i} \qquad |z_2| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \qquad z_2^{-1} = \dfrac{z_2^*}{|z_2|^2} = \dfrac{4}{25} + \dfrac{3}{25}\,\mathrm{i}$

   (c) $z_3 = -24 + 7\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z_3^* = -24 - 7\mathrm{i} \qquad |z_3| = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25 \qquad z_3^{-1} = \dfrac{z_3^*}{|z_3|^2} = -\dfrac{24}{625} - \dfrac{7}{625}\,\mathrm{i}$

3. •• *Division komplexer Zahlen*

   (a) $\dfrac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{13 - 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{13 + 13\mathrm{i} - 5\mathrm{i} - 5\mathrm{i}^2}{1 - \mathrm{i}^2} = \dfrac{13 + 8\mathrm{i} + 5}{1 + 1} = \dfrac{18 + 8\mathrm{i}}{2} = 9 + 4\mathrm{i}$

   (b) $\dfrac{2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}}{2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}}{2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}} = \dfrac{4 - 2\mathrm{i} - \frac{1}{4}}{4 + \frac{1}{4}} = \dfrac{\frac{15}{4} - 2\mathrm{i}}{\frac{17}{4}} = \dfrac{15}{4} \cdot \dfrac{4}{17} - 2 \cdot \dfrac{4}{17}\,\mathrm{i} = \dfrac{15}{17} - \dfrac{8}{17}\,\mathrm{i}$

   (c) $\dfrac{4\mathrm{i}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \dfrac{4i}{\sqrt{3} + \sqrt{5}\,\mathrm{i}} \cdot \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}\,\mathrm{i}} = \dfrac{4\sqrt{3}\,\mathrm{i} - 4\sqrt{5}\,\mathrm{i}^2}{3 - 5\mathrm{i}^2} = \dfrac{4\sqrt{5} + 4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$

4. •• *Der Identifikationstrick*

   i. Mit der Summenschreibweise $z = x + \mathrm{i}y$ erhalten wir durch ausmultiplizieren:

   $$(-2+7\mathrm{i})z = -5+97\mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad (-2+7\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = -5+97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x-2y\mathrm{i}+7x\mathrm{i}-7y = -5+97\mathrm{i}$$

   ii. Wir sortieren links nach reellen und imaginären Gliedern:

   $$-2x-7y+7x\mathrm{i}-2y\mathrm{i} = -5+97\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -2x-7y+(7x-2y)\mathrm{i} = -5+97\mathrm{i}$$

   iii. Jetzt lassen sich die Real- und die Imaginärteile links und rechts in der Gleichung je miteinander identifizieren und wir erhalten ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten:

   $$\left| \begin{array}{c} -2x-7y=-5 \\ 7x-2y=97 \end{array} \right|$$

   iv. Dieses Gleichungssystem lässt sich z.B. mit dem Additionsverfahren lösen:

   $$\left| \begin{array}{c} -2x-7y=-5 \\ 7x-2y=97 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -14x-49y=-35 \\ 14x-4y=194 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -53y = 169 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3$$

   $$\Rightarrow \quad -2x-7\cdot(-3) = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 13 \quad \Rightarrow \quad z = 13-3\mathrm{i}$$

   Zur Überprüfung des Resultates können wir z.B. zurückeinsetzen:

   $$(-2+7\mathrm{i})\cdot z = (-2+7\mathrm{i})\cdot(13-3\mathrm{i}) = -26+6\mathrm{i}+91\mathrm{i}+21 = -5+97\mathrm{i} \quad \checkmark$$

   Andererseits sollten wir durch die effizientere Divisionsmethode auf dasselbe Resultat kommen:

   $$\frac{-5+97\mathrm{i}}{-2+7\mathrm{i}} \cdot \frac{-2-7\mathrm{i}}{-2-7\mathrm{i}} = \frac{10+35\mathrm{i}-194\mathrm{i}+679}{4+49} = \frac{689-159\mathrm{i}}{53} = 13-3\mathrm{i} \quad \checkmark$$

5. ○ *Mehr Aufgabenstellungen mit komplexen Zahlen*

   (a) Wir benutzen die Ausmultiplikation mittels Binomialkoeffizienten (Pascal'sches Dreieck):

   i. $(2-\mathrm{i})^4 = 2^4 - 4\cdot 2^3\cdot\mathrm{i} + 6\cdot 2^2\cdot\mathrm{i}^2 - 4\cdot 2\cdot\mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 16-32\mathrm{i}-24+8\mathrm{i}+1 = -7-24\mathrm{i}$

   ii. $\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = \mathrm{Re}\big((\mathrm{i}-1)^5\big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{i}^5 - 5\mathrm{i}^4 + 10\mathrm{i}^3 - 10\mathrm{i}^2 + 5\mathrm{i} - 1\big)$

   Alle ungeraden Potenzen von i werden nichts zum Realteil beitragen, sodass wir schreiben können:

   $$\mathrm{Re}\big((-1+\mathrm{i})^5\big) = -5\mathrm{i}^4 - 10\mathrm{i}^2 - 1 = -5+10-1 = 4$$

   Ganz ähnlich verfahren wir bei der Bestimmung des Imaginärteils in iii., wobei jetzt die geraden Potenzen von i herausfallen:

   iii. $$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(\left(2-\frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right)^6\right) &= \mathrm{Im}\left(2^6 - 6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} + 15\cdot 2^4\cdot\frac{\mathrm{i}^2}{2^2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} + 15\cdot 2^2\cdot\frac{\mathrm{i}^4}{2^4} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5} + \frac{\mathrm{i}^6}{2^6}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^5\cdot\frac{\mathrm{i}}{2} - 20\cdot 2^3\cdot\frac{\mathrm{i}^3}{2^3} - 6\cdot 2\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^5}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(-6\cdot 2^4\,\mathrm{i} - 20\,\mathrm{i}^3 - 3\cdot\frac{\mathrm{i}^5}{2^3}\right) = \mathrm{Im}\left(-96\mathrm{i} + 20\mathrm{i} - 3\cdot\frac{\mathrm{i}}{8}\right) = -76\,\frac{3}{8} \end{aligned}$$

(b) Grundsätzlich können wir immer $z = x + y\mathrm{i}$ resp. $z^* = x - y\mathrm{i}$ einsetzen und danach separat die Real- und die Imaginärteile beider Gleichungsseiten einander gleichsetzen. Dabei sind $\mathrm{Re}(z) = x$ und $\mathrm{Im}(z) = y$:

i. $(1+2\mathrm{i})z = (5-\mathrm{i})z + 7 + 26\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (1+2\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) = (5-\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) + 7 + 26\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} - 2y = 5x + 5y\mathrm{i} - x\mathrm{i} + y + 7 + 26\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x - 2y + (y + 2x)\mathrm{i} = 5x + y + 7 + (-x + 5y + 26)\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x - 2y = 5x + y + 7 \\ y + 2x = -x + 5y + 26 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 4x + 3y = -7 \\ 3x - 4y = 26 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16x + 12y = -28 \\ 9x - 12y = 78 \end{array} \right|$

$\Rightarrow \quad 25x = 50 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad 8 + 3y = -7 \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -15 \quad \Leftrightarrow \quad y = -5$

$\Rightarrow \quad z = x + yi = 2 - 5i$

ii. $(2+\mathrm{i})z - 3\mathrm{Re}(z) = -18 + 30\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad (2+\mathrm{i})(x+y\mathrm{i}) - 3x = -18 + 30\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 2y\mathrm{i} + x\mathrm{i} - y - 3x = -18 + 30\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -x - y + (x + 2y)\mathrm{i} = -18 + 30\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -x - y = -18 \\ x + 2y = 30 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad y = 12 \quad \Rightarrow \quad x + 24 = 30 \quad \Leftrightarrow \quad x = 6$

$\Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 6 + 12\mathrm{i}$

iii. $z + 2\mathrm{i}z^* = 8 + 7\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2\mathrm{i}(x - y\mathrm{i}) = 8 + 7\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad x + y\mathrm{i} + 2x\mathrm{i} + 2y = 8 + 7\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad x + 2y + (2x + y)\mathrm{i} = 8 + 7\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x + 2y = 8 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} x + 2y = 8 \\ -4x - 2y = -14 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -3x = -6 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$

$\Rightarrow \quad 2 + 2y = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$

iv. $\dfrac{z - 3\mathrm{i} - 3}{z + 2 + 4\mathrm{i}} = \mathrm{i} \quad \Rightarrow \quad z - 3\mathrm{i} - 3 = \mathrm{i}(z + 2 + 4\mathrm{i}) = z\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 4$

$\Leftrightarrow \quad z - z\mathrm{i} = -1 + 5\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z(1 - \mathrm{i}) = -1 + 5\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad z = \dfrac{-1 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{-1 + 5\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} \cdot \dfrac{1 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{-1 + 5\mathrm{i} - \mathrm{i} - 5}{1 + 1} = \dfrac{-6 + 4\mathrm{i}}{2} = -3 + 2\mathrm{i}$

v. $\mathrm{Im}(z^* + 1) + \mathrm{i}\mathrm{Re}(-z + 2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(x - y\mathrm{i} + 1) + \mathrm{i}\mathrm{Re}(-x - y\mathrm{i} + 2) = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad -y + (-x + 2)\mathrm{i} = -\dfrac{1}{2} - 6\mathrm{i}$

$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -y = -\frac{1}{2} \\ -x + 2 = -6 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} y = \frac{1}{2} \\ x = 8 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad z = x + y\mathrm{i} = 8 + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}$

6. ○○ *Der kleinstmögliche Körper*

Mit den Definitionen für Addition und Multiplikation gehen wir ein Körperaxiom nach dem andern durch:

i. Assoziativität der Addition: Es gibt acht mögliche Fälle, denn $a, b, c \in \mathbb{K}$ können je entweder 0 oder 1 sein:

$$\begin{aligned}
0+(0+0) &= 0+0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0+0)+0 = 0+0 = 0 \\
0+(0+1) &= 0+1 = 1 && \text{ist dasselbe wie} && (0+0)+1 = 0+1 = 1 \\
0+(1+0) &= 0+1 = 1 && \text{ist dasselbe wie} && (0+1)+0 = 1+0 = 1 \\
0+(1+1) &= 0+0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0+1)+1 = 1+1 = 0 \\
1+(0+0) &= 1+0 = 1 && \text{ist dasselbe wie} && (1+0)+0 = 1+0 = 1 \\
1+(0+1) &= 1+1 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (1+0)+1 = 1+1 = 0 \\
1+(1+0) &= 1+1 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (1+1)+0 = 0+0 = 0 \\
1+(1+1) &= 1+0 = 1 && \text{ist dasselbe wie} && (1+1)+1 = 0+1 = 1
\end{aligned}$$

ii. Kommutativität der Addition: Dies ist trivial, denn die Addition wird direkt sichtbar kommutativ definiert ($a+b=b+a$ gilt für jede Wahl von a und b).

iii. Nullelement: Offensichtlich ist dies die Zahl 0, denn $0+0=0$ und $1+0=1$.

iv. Negatives Element: Ja, zu jedem Element a des Körpers gibt es ein negatives Element $(-a)$, das zu a addiert das Nullelement 0 ergibt. Das negative Element (-0) zum Element 0 ist 0 selber, denn $0+0=0$. Das negative Element (-1) zum Element 1 ist 1 selber, denn $1+1=0$.

Beachte: Niemand hat gefordert, dass das negative Element $(-a)$ zu einem Element a nicht das Element a selber sein kann. Kein Körperaxiom widerspricht dieser Möglichkeit.

v. Assoziativität der Multiplikation: Auch hier gibt es acht mögliche Fälle, die im Prinzip alle überprüft werden müssen:

$$\begin{aligned}
0\cdot(0\cdot 0) &= 0\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0\cdot 0)\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0 \\
0\cdot(0\cdot 1) &= 0\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0\cdot 0)\cdot 1 = 0\cdot 1 = 0 \\
0\cdot(1\cdot 0) &= 0\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0\cdot 1)\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0 \\
0\cdot(1\cdot 1) &= 0\cdot 1 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (0\cdot 1)\cdot 1 = 0\cdot 1 = 0 \\
1\cdot(0\cdot 0) &= 1\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (1\cdot 0)\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0 \\
1\cdot(0\cdot 1) &= 1\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (1\cdot 0)\cdot 1 = 0\cdot 1 = 0 \\
1\cdot(1\cdot 0) &= 1\cdot 0 = 0 && \text{ist dasselbe wie} && (1\cdot 1)\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0 \\
1\cdot(1\cdot 1) &= 1\cdot 1 = 1 && \text{ist dasselbe wie} && (1\cdot 1)\cdot 1 = 0\cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

vi. Kommutativität der Multiplikation: Auch die Multiplikation ist direkt sichtbar für alle möglichen Fälle kommutativ definiert.

vii. Einselement: Die Zahl 1 ist das Einselement, denn $0\cdot 1=0$ und $1\cdot 1$.

viii. Inverses Element: Das inverse Element 1^{-1} zum Element 1 ist 1 selber, denn $1\cdot 1=1$.

N.B.: Zum Nullelement 0 muss es kein Inverses geben! Das ist bestens, denn genau dies würde nicht klappen. Eine Zahl multipliziert mit 0 ist immer 0.

ix. Distributivität: Dies prüfen wir ebenfalls, indem wir alle acht möglichen Fälle einen nach dem andern durchgehen:

$$
\begin{array}{lll}
0 \cdot (0+0) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (0+1) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 0) + (0 \cdot 1) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+0) = 0 \cdot 1 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
0 \cdot (1+1) = 0 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (0 \cdot 1) + (0 \cdot 1) = 0 + 1 = 0 \\
1 \cdot (0+0) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 0) = 0 + 0 = 0 \\
1 \cdot (0+1) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 0) + (1 \cdot 1) = 0 + 1 = 1 \\
1 \cdot (1+0) = 1 \cdot 1 = 1 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 0) = 1 + 0 = 1 \\
1 \cdot (1+1) = 1 \cdot 0 = 0 & \text{ist dasselbe wie} & (1 \cdot 1) + (1 \cdot 1) = 1 + 1 = 0
\end{array}
$$

Tatsächlich haben wir nun alle Körperaxiome verifiziert. Die Menge $\{0, 1\}$ zusammen mit der in der Aufgabenstellung deklarierten Addition und Multiplikation bildet demnach tatsächlich einen **Körper**, und zwar den kleinst möglichen!