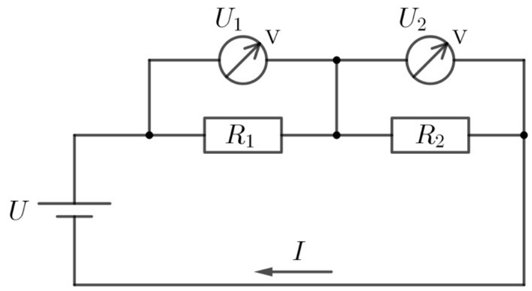
2 Spannungsteilung, Transistor und Kondensator – der Weg zu einer Zeitschaltung

2.1 Spannungsteilung durch Widerstände

Regel 1: Seriell (= hintereinander) geschaltete Widerstände teilen sich die Gesamtspannung auf!



Serieschaltung von R_1 und R_2

$$\Rightarrow \quad U = U_1 + U_2$$

"Gesamtspannung = Summe der Teilspannungen"

$$\Rightarrow \quad R = R_1 + R_2$$

"Gesamtwiderstand = Summe der Teilwiderstände"

Wichtig: Schaltung sieht auf den ersten Blick verzweigt aus. Trifft aber nicht zu, denn (ideale) Voltmeter (= Spannungsmessgeräte) lassen keinen Strom fliessen (unendlich grosser Widerstand) $\Rightarrow$ gesamter Strom Strom I fliesst sowohl durch R_1, als auch durch R_2.

Begründung: Spannungsdefinition: $U := \frac{\Delta E}{Q}$
$\Rightarrow$ Ladung Q erhält von Quelle die Energie $\Delta E = UQ \Rightarrow$ wird in Widerständen verbraucht.
$\Rightarrow$ Umsatz im Widerstand 1: $\Delta E_1 = U_1 Q$; Umsatz im Widerstand 2: $\Delta E_2 = U_2 Q$.
Aufgrund *Energieerhaltung* muss gelten:

$$\begin{aligned} & \Delta E = \Delta E_1 + \Delta E_2 && |\, \Delta E = U \cdot Q \\ \Rightarrow \quad & U \cdot Q = U_1 \cdot Q + U_2 \cdot Q && |\, : Q \\ \Leftrightarrow \quad & U = U_1 + U_2 \end{aligned}$$

In Worten: *"In Serieschaltungen addieren sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung."*

Regel 2: Bei einer Serieschaltung addieren sich die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand.

Begründung: Für Widerstände und Stromkreis insgesamt gilt je ein *Ohm'sches Gesetz*, sodass folgt:

$$\begin{aligned} & U = U_1 + U_2 && |\, \textit{Ohm'sches Gesetz: } U = R \cdot I \\ \Rightarrow \quad & R \cdot I = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I && |\, : I \\ \Leftrightarrow \quad & R = R_1 + R_2 \end{aligned}$$

Wir haben ausgenutzt, dass in Serieschaltung überall dieselbe Stromstärke I herrscht.

Spannungsteilung! Mit zwei Widerständen in Serie können wir eine Spannung U nach eigenem Wunsch in zwei Teilspannungen U_1 und U_2 aufteilen. Dabei gilt:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1 \cdot I}{R_2 \cdot I} = \frac{R_1}{R_2} \qquad \text{resp.} \qquad U_1 : U_2 = R_1 : R_2$$

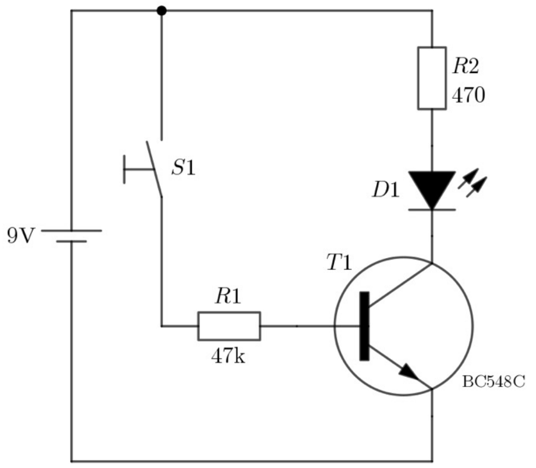
$\Rightarrow$ Die Gesamtspannung wird im Verhältnis der Teilwiderstände aufgeteilt. Die Teilspannungen lassen sich sehr leicht berechnen:

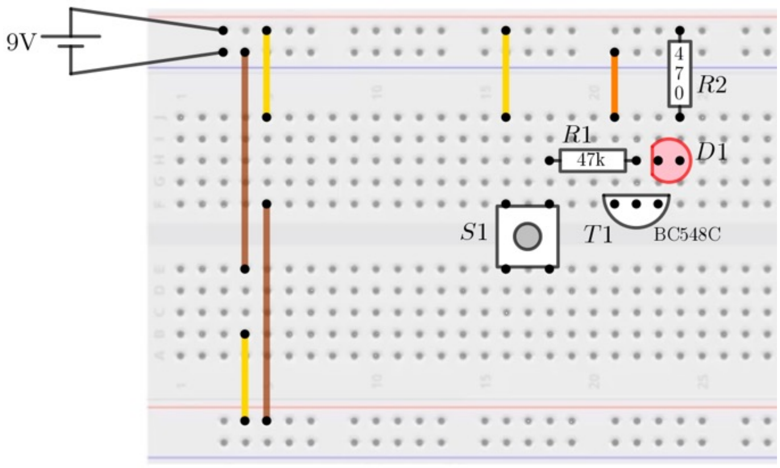
$$U_1 = R_1 \cdot I = R_1 \cdot \frac{U}{R} = I_1 \cdot \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot U \qquad \text{und} \qquad R_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot U$$

Beispiel: An $U = 9\,\mathrm{V}$ werden zwei Widerstände $R_1 = 220\,\Omega$ und $R_2 = 470\,\Omega$ seriell angeschlossen.

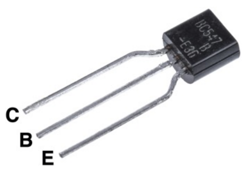
$$\Rightarrow \qquad U_1 = \frac{220\,\Omega}{220\,\Omega + 470\,\Omega} \cdot 9\,\mathrm{V} = 2.87\,\mathrm{V} \qquad \text{und} \qquad U_2 = \frac{470\,\Omega}{220\,\Omega + 470\,\Omega} \cdot 9\,\mathrm{V} = 6.13\,\mathrm{V}$$

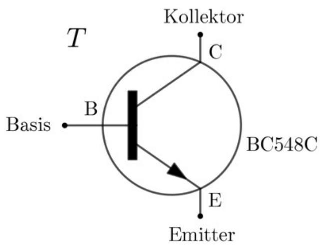
2.2 Unsere erste Transistorschaltung

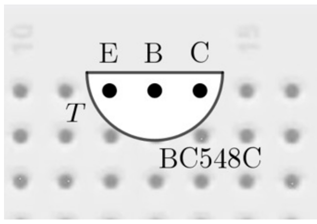




- *Transistor* = vermutlich wichtigstes Schaltelement der gesamten Elektronik!
- Transistor-Anschlüsse haben Namen:
  Kollektor (C),
  Basis (B) und
  Emitter (E).



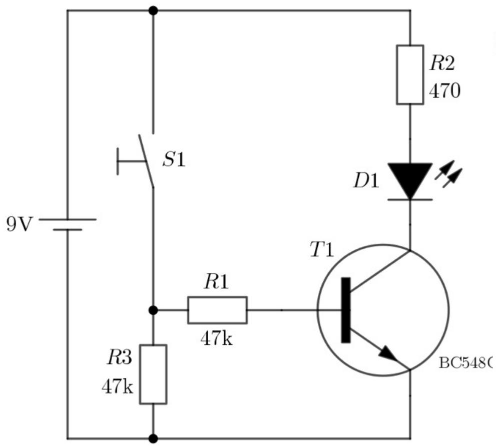


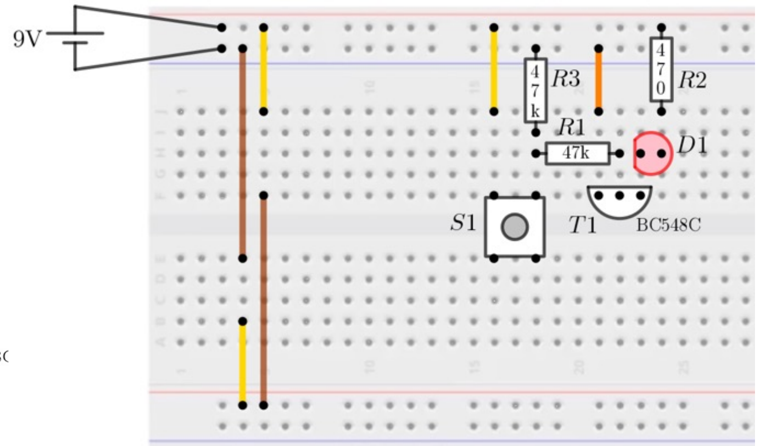


- Funktionsweise: Spannung U_{BE} zwischen Basis und Emitter regelt die Leitfähigkeit des Transistors zwischen Kollektor und Emitter:
  U_{BE} hinreichend gross $\Rightarrow$ Transistor leitet / "offen".
  U_{BE} zu klein $\Rightarrow$ Transistor sperrt / "geschlossen".
- Beim von uns verwendeten Modell (BC548C): *Schaltspannung* $U_{\mathrm{BE}} \approx 0.7\,\mathrm{V}$ $\rightarrow$ Merken!
- Erläuterung der Schaltung:
  - Transistor grundsätzlich geschlossen, weil Spannung U_{BE} undefiniert. (Aber: Gäbe es dort anfangs eine Spannung, wäre also eine positive Ladung vorhanden, so würde sich diese rasch über einen Strom B$\rightarrow$ E durch den Transistor abbauen.)
  - Wird $S1$ betätigt, so wird die Basis über $R1$ mit dem Pluspol der Quelle verbunden und der Transistor wird leitend.
  - Es braucht keinen grossen Basisstrom zur Öffnung des Transistors. Daher können wir mit einem grossen Widerstand von $R1$ ($= 47\,\mathrm{k}\Omega$) arbeiten. Transistor und $R1$ regeln zusammen, wie viel Basisstrom fliesst – nämlich genau soviel, dass der Transistor gut geöffnet ist. Bei der Messung von U_{BE} erhalten wir gerade etwa die $0.7\,\mathrm{V}$ Schaltspannung. In diesem Sinne ist es zum Schutz des Transistors – der nämlich auf zu grosse Basisströme empfindlich reagiert – gut, einen ziemlich grossen Widerstand vor die Basis zu schalten, über dem dann ein Grossteil der $9\,\mathrm{V}$ Gesamtspannung abgebaut werden kann. Wir merken uns:
    Transistorschutz: Nie Basis und Emitter direkt an die Spannungsquelle anschliessen!
  - Rechne: $U_{\mathrm{BE}} = 0.7\,\mathrm{V} \Rightarrow U$ über $R1 = 9\,\mathrm{V} - 0.7\,\mathrm{V} = 8.3\,\mathrm{V} \Rightarrow I$ durch $R1 = \frac{8.3\,\mathrm{V}}{47\,\mathrm{k}\Omega} = 0.18\,\mathrm{mA}$.
    Im Vergleich dazu messen wir für den Strom durch die LED $D1$: $I \approx 15\,\mathrm{mA}$.
    Beides sind sehr kleine Ströme, aber der Basisstrom ist nochmals viel kleiner als der Diodenstrom. Die Diode ist der Leistungsbezüger, die sogenannte *Last* in unserer Schlatung. Daher bezeichnen wir den Diodenstrom als *Laststrom*. Der kleine Basisstrom wird hingegen als ein *Steuerstrom* bezeichnet.

- Ein grosser Vorteil der Elektronik ist, dass sie mit wahnsinnig kleinen Steuerströmen auskommt. Alle unsere logischen Schaltungen arbeiten mit derartig kleinen Strömen. Erst beim Output muss allenfalls mittels eines Transistors der Weg für einen grösseren Laststrom geöffnet werden!

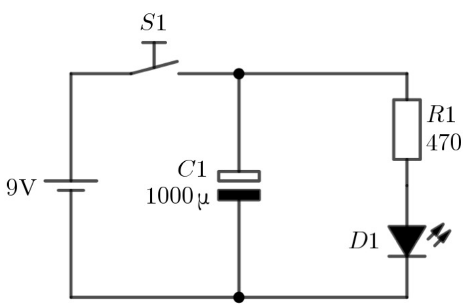
- Optimierung: Die "Undefiniertheit" von U_{BE} bei nicht gedrücktem Taster $S1$ ist unbefriedigend. Theoretisch könnte so eine elektrische Entladung in der Nähe (statische Elektrizität) kurzzeitig $T1$ öffnen. Das möchten wir verhindern. Wir sorgen dafür, dass U_{BE} bei nicht gedrücktem Taster $S1$ gleich 0 ist, indem wir einen zusätzlichen (grossen) Widerstand $R3$ einbauen:

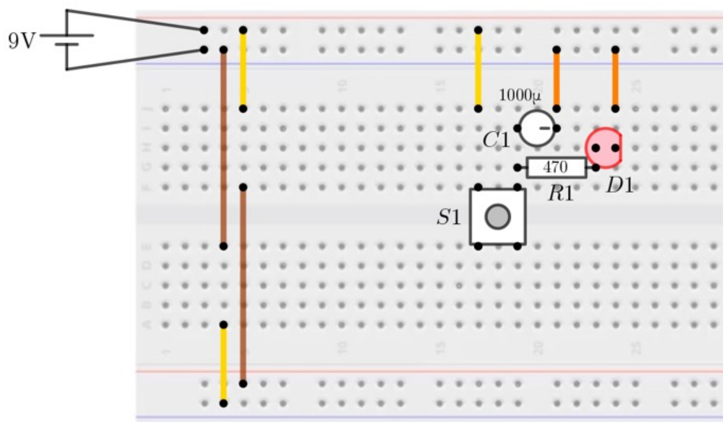




Solange $S1$ nicht gedrückt wird, kann nun eine allfällige Ladung an der Basis abfliessen.

2.3 Der Kondensator – eine kurzzeitige Batterie



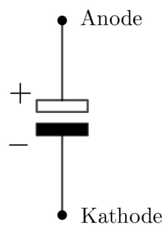


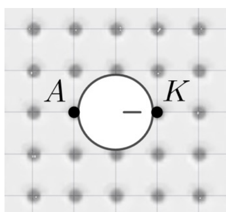
- *Kondensator* = kleiner Ladungsspeicher. Wichtiges Bauteil für das Timing innerhalb einer Schaltung, wie wir gleich sehen werden.

- Wir verwenden sogenannte *Elektrolytkondensatoren* – kurz: *Elko* – bei denen es wichtig ist, die Polung richtig herum anzuschliessen (sonst gehen sie kaputt)!

  Positive Seite (+): Langes Bein.

  Negative Seite (–): Kurzes Bein und der Körper des Elkos hat dort einen fetten dunklen Streifen mit einem Minuszeichen drauf.





- Erläuterung der Schaltung: Wird $S1$ betätigt, so fliesst Strom durch die LED $D1$. Sie leuchtet auf. Lässt man $S1$ los, so leuchtet die LED jetzt aber noch weiter. Ihr Leuchten wird aber sehr rasch schwächer. Grund dafür ist, dass sich der Elko $C1$ bei Betätigung von $S1$ schlagartig auflädt. Schlagartig, weil er selber keinen Widerstand hat und somit die Ladung zu seiner "Befüllung" ohne Hindernis fliessen kann. Wird $S1$ wieder losgelassen, so entlädt sich der Elko danach über die LED. D.h., er wird selber zu einer Art Batterie. Offensichtlich ist sein Fassungsvermögen aber nicht allzu gross, sodass er die LED nur für eine kurze Zeit mit Energie versorgen kann.

Die Kapazität von Kondensatoren

Lädt man einen Kondensator auf, so speichert er auf der positiven Seite eine bestimmte positive Ladungsmenge $+Q$ und auf der negativen Seite die entsprechende negative Ladungsmenge $-Q$. Wie gross diese Ladungen sind, hängt von der Spannung U, an die der Kondensator zum Aufladen angehängt wird. Diese Spannung drückt nämlich die Ladung in den Kondensator. Dadurch werden die Ladungen im Kondensator immer grösser, bis der Punkt erreicht ist, wo nicht noch mehr positive Ladung in die bereits positiv geladene Seite des Kondensators hineingedrückt werden kann – entsprechend auf der negativen Seite.

Es gilt: Aufladespannung U und Kondensatorladung Q sind *proportional* zueinander. Wenn sich bei einer bestimmten Spannung U die Ladungsmenge Q auf den Kondensatorseiten befindet, so verdoppelt sich diese Ladungsmenge bei Verdoppelung der Spannung, etc. Wir führen eine *Proportionalitätskonstante* C ein und notieren als Gleichung: $Q = C \cdot U$.

C wird als die *Kapazität* des Kondensators bezeichnet. Sie beschreibt das Fassungsvermögen eines Kondensators. Entsteht durch wenig Spannung U bereits eine grosse Kondensatorladung Q, so besitzt er eine grosse Kapazität C. Umgekehrt ist die Kapazität C klein, wenn am Kondensator bereits für eine kleine Ladungsmenge Q eine grosse Spannung U benötigt wird. Die Auflösung obiger Gleichung nach C liefert die Definition der Kapazität:

$$C := \frac{Q}{U} \qquad \text{"Kapazität = Ladung pro Spannung"}$$

Aus dieser Definition folgt sofort für die als *Farad* F bezeichnete SI-Einheit der Kapazität:

$$[\,C\,] = \frac{[\,Q\,]}{[\,U\,]} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}} =: \mathrm{Farad} = \mathrm{F}$$

Das Farad ist eine sehr grosse Einheit. Typische Kondensator-Kapazitäten elektronischer Schaltungen liegen im Bereich von $10\,\mathrm{nF}$ bis $1000\,\mu\mathrm{F}$. In unserer vorigen Schaltung haben wir einen bereits recht klobigen $1000\,\mu\mathrm{F}$-Kondensator verwendet. Er ist in der Elektronik ein eher selten verwendetes Bauteil. Obwohl er unser grösster Kondensator ist, kann er die LED für nur knapp drei Sekunden am Leuchten halten. Das ist nicht weiter überraschend, denn die LED ist in unserem Stromkreis die Last, also ein echter Leistungsbezüger mit verhältnismässig grossem Strombedarf. Dafür sind Kondensatoren gar nicht ausgelegt. Sie sollen die deutlich kleineren Steuerströme zeitlich regeln!

Wir wollen hier noch rasch quantitativ überprüfen, ob alles zusammenpasst und so ein Gefühl für sonst nicht so zugängliche Einheiten wie das Coulomb oder das Farad erhalten: Schliessen wir unseren $1000\,\mu\mathrm{F}$-Elko durch das Drücken von $S1$ an die $9\,\mathrm{V}$-Spannungsquelle an, so speichert er sofort eine Ladungsmenge von

$$Q = C \cdot U = 1000\,\mu\mathrm{F} \cdot 9\,\mathrm{V} = 1000 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F} \cdot 9\,\mathrm{V} = 0.009\,\mathrm{C} = 9\,\mathrm{mC} \quad .$$

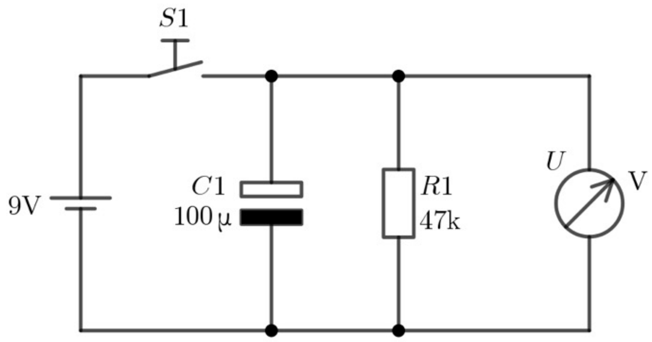
In der Schaltung mit der LED hatten wir den Strom durch die LED mit etwa $15\,\mathrm{mA}$ gemessen, wenn sie voll leuchtet. Gehen wir hier von derselben Stromstärke aus, so können wir sofort die Zeit abschätzen, über die hinweg die LED vom Elko betrieben werden kann:

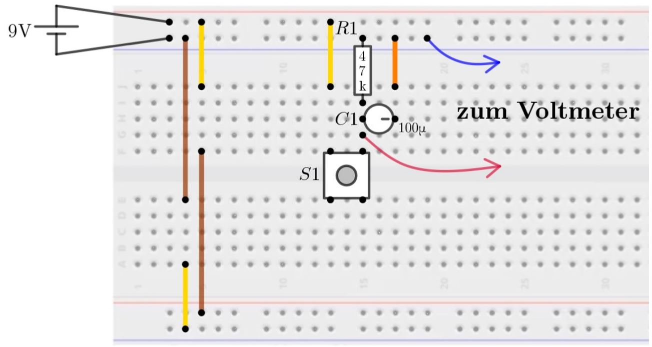
$$I = \frac{Q}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{Q}{I} = \frac{9\,\mathrm{mC}}{15\,\mathrm{mA}} = 0.6\,\mathrm{s}$$

Diese Resultat liegt schonmal in der Grössenordnung unserer Beobachtung. Ausserdem verstehen wir, dass die LED etwas länger leuchtet, denn ihre Helligkeit nimmt ja schnell ab, was bedeutet, dass eben schon nach kurzer Zeit die Ladung auf dem Kondensator merklich zurückgeht. Damit wird auch die von ihm zur Verfügung gestellte Spannung kleiner und in der Folge wird immer weniger Strom fliessen, sodass der Entladungsprozess insgesamt länger dauert, als wenn wir von einer konstanten Stromstärke ausgehen.

2.4 Ein elektronischer Timer – Teamwork von Kondensator und Widerstand

Den Entladungsvorgang eines Kondensators wollen wir nun noch genauer unter die Lupe nehmen und besser verstehen. Dazu bauen wir die folgende Schaltung:





- Erläuterung der Schaltung: Drücken wir den Taster $S1$, so lädt sich der Kondensator $C1$ sofort auf (weil er selber keinen Widerstand hat). Gleichzeitig fliesst bereits ein geringer Strom I_0 durch den Widerstand $R1$ und mit dem Voltmeter messen wir in diesem Moment die Spannung U_0 der Quelle, also etwa $9\,\mathrm{V}$.

  Wird $S1$ losgelassen, so beginnt sich $C1$ über $R1$ zu entladen. (Zur Erinnerung: Das Voltmeter lässt keinen Strom fliessen, es greift nur die Spannung ab.) Mit dem Voltmeter beobachten wir nun, wie sich die Spannung U über $R1$ resp. $C1$ verändert. Da sich der Kondensator entlädt, nimmt U ab. Das passiert aber nicht linear, sondern zuerst schnell und dann immer langsamer. Dieses Verhalten ist nicht überraschend, denn wenn die Kondensatorspannung abnimmt, fliesst aufgrund des Ohm'schen Gesetzes immer weniger Strom ($U = R \cdot I$ resp. $I = \frac{U}{R}$), was dazu führt, dass sich der Kondensator weniger schnell entlädt.

Differentialgleichung führt auf exponentielle Abnahme

Diesen Rückgang der Spannung wollen wir an dieser Stelle auch mathematisch genau verstehen. Zunächst halten wir fest:

- Zu jedem Zeitpunkt t ist der momentan fliessende Strom I aufgrund des Ohm'schen Gesetzes durch den momentanen Wert U der Kondensatorspannung und den Widerstand R gegeben:

$$I = \frac{U}{R}$$

- Zu jedem Zeitpunkt t hängt die vom Kondensator bereit gestellte Spannung U über die Kapazität C des Kondensators mit der noch vorhandenen Kondensatorladung Q zusammen:

$$U = \frac{Q}{C}$$

- Die aktuelle Stromstärke I beschreibt die Veränderungsrate der Kondensatorladung Q. Mathematisch bedeutet das, dass der Strom für die Ableitung $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ der Ladung Q nach der Zeit t steht:

$$I = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

  Dabei haben wir ein Minuszeichen eingefügt, weil die Kondensatorladung Q abnimmt. Das bedeutet $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$ hat einen negativen Wert. Den fliessenden Strom I wollen wir aber mit einem positiven Wert angeben.

Nun können wir diese drei Beziehungen miteinander verknüpfen und eine Gleichung für die Kondensatorspannung U aufstellen:

$$\begin{aligned} && \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -I && \quad \mid Q = UC \text{ und } I = \frac{U}{R} \\ \Rightarrow && C \cdot \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= -\frac{U}{R} && \quad \mid : C \\ \Leftrightarrow && \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{RC} \cdot U && \end{aligned}$$

Das bedeutet: Zu jedem Zeitpunkt t ist die Veränderungsrate der Spannung, also $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$, proportional zu aktuellen Spannung U selbst. Dabei ist die Proportionalitätskonstante der Faktor $-\frac{1}{RC}$. Das Minuszeichen passt, denn die Spannung nimmt ja ab, d.h. $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$ muss negativ sein, wenn die Spannung U positiv ist.

Die letzte Zeile oben ist eine sogenannte *Differentialgleichung* für die Spannungsfunktion $U(t)$, die mir zu jedem Zeitpunkt t angibt, wie viel Spannung U der Kondensator noch liefert. Wenn man mit solchen Differentialgleichungen etwas Erfahrung hat, kennt man bereits den hier passenden Funktionsansatz. Es muss sich um eine abnehmende Exponentialfunktion handeln:

$$U(t) = A \cdot e^{-\lambda t}$$

Um zu sehen, dass dies der korrekte Ansatz ist, müssen wir ihn ableiten und uns so davon erzeugen, dass er die obige Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = A \cdot e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda \cdot U(t) \overset{!}{=} -\frac{1}{RC} \cdot U$$

Tatsächlich erfüllt unser Ansatz die Differentialgleichung, wenn die sogenannte Zerfallskonstante λ durch $\frac{1}{RC}$ gegeben ist.

Der Wert des Vorfaktors bleibt zunächst unbestimmt, wird aber durch die Vorgabe der Anfangsbedingung $U(0) \overset{!}{=} U_0$ festgelegt:

$$U(0) = A \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = A \cdot e^0 = A \overset{!}{=} U_0 \quad \Leftrightarrow \quad A = U_0$$

Somit haben wir unsere passende Funktion vollständig bestimmt:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{\frac{t}{RC}}$$

Wir sollten sicherheitshalber kurz überprüfen, ob die Zerfallskonstante $\lambda = \frac{1}{RC}$ tatsächlich die Dimension einer inversen Zeit aufweist, denn sonst würde der Exponent $-\frac{t}{RC}$ keine Zahl, sondern ein physikalische Angabe mit einer Einheit sein, was unsinnig wäre.[1] Am einfachsten führen wir diese Überprüfung anhand unserer konkreten Angaben und ihren Einheiten durch:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{RC} = \frac{1}{47\,\mathrm{k\Omega} \cdot 100\,\mathrm{\mu F}} = \frac{1}{47 \cdot 10^3\,\Omega \cdot 100 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}} = \frac{10}{47}\,\frac{1}{\Omega \cdot \mathrm{F}} \approx 0.213\,\frac{1}{\Omega \cdot \mathrm{F}} \\ &= 0.213\,\frac{1}{\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}} \cdot \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}} = 0.213\,\frac{1}{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}} = 0.213\,\frac{1}{\frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{A}}} = 0.213\,\frac{1}{\mathrm{s}} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Offensichtlich ist $\Omega \cdot \mathrm{F} = \mathrm{s}$.

Die Basis e ($\approx 2.718 =$ Euler'sche Zahl) ist in Mathematik und Physik sehr gebräuchlich, weil die Ableitung der Exponentialfunktion damit besonders leicht fällt. Anschaulicher bei abnehmenden Exponentialfunktionen ist aber oftmals die Basis $\frac{1}{2}$. Mit dieser Basis schreiben wir:

$$U(t) = U_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}$$

[1] Was sollten wir uns denn z.B. unter einer Potenz $2^{5\,\mathrm{s}}$ vorstellen?

So notiert braucht es im Exponenten kein Minuszeichen mehr, denn die Abnahme steckt bereits in der Basis $\frac{1}{2} < 1$. Die Zeit $T_{1/2}$ steht für die *Halbwertzeit* $T_{1/2}$: Pro Zeitspanne $T_{1/2}$, die in der Zeit t enthalten ist, wird die anfängliche Spannung U_0 je einmal halbiert. Natürlich muss es unser erstes Ziel sein diese Halbwertzeit anzugeben. Dafür setzen wir gleich:

$$\begin{aligned}
& U(t) = U_0 \cdot e^{-\lambda t} \stackrel{!}{=} U_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid : U_0 \\
\Leftrightarrow \quad & e^{-\lambda t} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} && \mid \ln(\ldots) \\
\Leftrightarrow \quad & -\lambda t = \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}}\right) && \mid \text{3. Log-Gesetz:} \quad \ln\left(b^c\right) = c \cdot \ln(b) \\
\Leftrightarrow \quad & -\lambda t = \frac{t}{T_{1/2}} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) && \mid \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(2^{-1}\right) = (-1) \cdot \ln(2) = -\ln(2) \\
\Leftrightarrow \quad & -\lambda t = \frac{t}{T_{1/2}} \cdot \left(-\ln(2)\right) && \mid \cdot \left(-\frac{T_{1/2}}{t}\right) \\
\Leftrightarrow \quad & T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}
\end{aligned}$$

Somit können wir die Halbwertzeit unserer Kondensator-Entladungsschaltung berechnen:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx \frac{\ln(2)}{0.213\,\frac{1}{\mathrm{s}}} \approx 3.25\,\mathrm{s}$$

Alle $3.26\,\mathrm{s}$ halbiert sich somit die noch vorhandene Kondensatorspannung U. Notieren wir damit die Spannungsfunktion $U(t)$ vollständig:

$$U(t) = U_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T_{1/2}}} = 9\,\mathrm{V} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.26\,\mathrm{s}}}$$

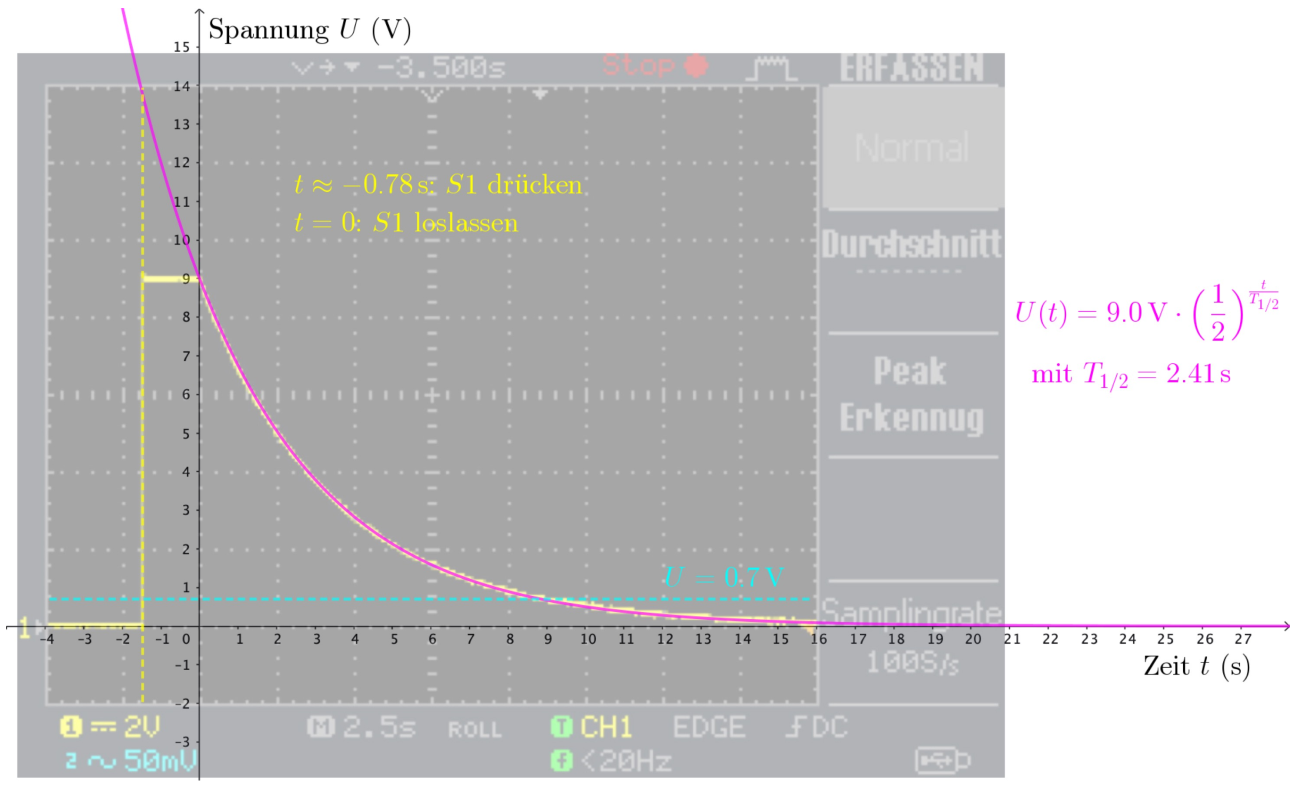
Nun können wir beispielsweise die Frage beantworten, wie lange es nach dem Loslassen von $S1$ dauert, bis die Spannung auf einen Wert von $0.7\,\mathrm{V}$ reduziert wird. Solche Fragen laufen mathematisch auf die Anwendung eines Logarithmus hinaus:

$$U(t) = 9\,\mathrm{V} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.26\,\mathrm{s}}} \stackrel{!}{=} 0.7\,\mathrm{V} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.26\,\mathrm{s}}} = \frac{0.7}{9} \quad \Leftrightarrow \quad t = 3.26\,\mathrm{s} \cdot \log_{1/2}\left(\frac{0.7}{9}\right) \approx 12.0\,\mathrm{s}$$

Es dauert etwa 12 Sekunden, bis die Spannung den Wert $0.7\,\mathrm{V}$ unterschreitet.

Indem wir den Spannungsabfall mit einem *digitalen Oszilloskop* als Voltmeter aufzeichnen, können wir zum Schluss dieser Ausführungen Theorie und Praxis miteinander vergleichen. Oben auf der nächsten Seite sehen wir das Bild des Oszilloskops, über das wir eine mathematisch exakte, abfallende Exponentialfunktion gelegt haben. Dabei steht $t = 0$ für den Zeitpunkt, wo der Taster $S1$ losgelassen wird und die Spannungsabnahme beginnt. Wir sehen die verblüffend gute Übereinstimmung von theoretischer Vorhersage und tatächlichem Spannungsverlauf.

Das exponentielle Modell stimmt sehr genau mit der Realität überein. Allerdings gehört zur pinken Kurve eine klar kürzere Halbwertzeit von nur $2.41\,\mathrm{s}$ anstelle der aus $R1$ und $C1$ berechneten $3.26\,\mathrm{s}$. Der Grund für diesen Unterschied ist, dass das Oszilloskop kein ideales Voltmeter ist und somit einen kleinen Strom parallel zu $R1$ fliessen lässt. Das Oszilloskop weist einen grossen, aber eben nicht unendlich grossen Widerstand auf. Insgesamt fliesst also etwas mehr Strom, was zu einer rascheren Spannungsabnahme führt. Die blaue Horizontale auf der Höhe $U = 0.7\,\mathrm{V}$ wird von der Funktion bei ca. $t = 9.0\,\mathrm{s}$ durchquert. Das ist aufgrund des eben beschriebenen Oszilloskop-Effekts ebenfalls deutlich früher als die oben berechneten $12.0\,\mathrm{s}$.



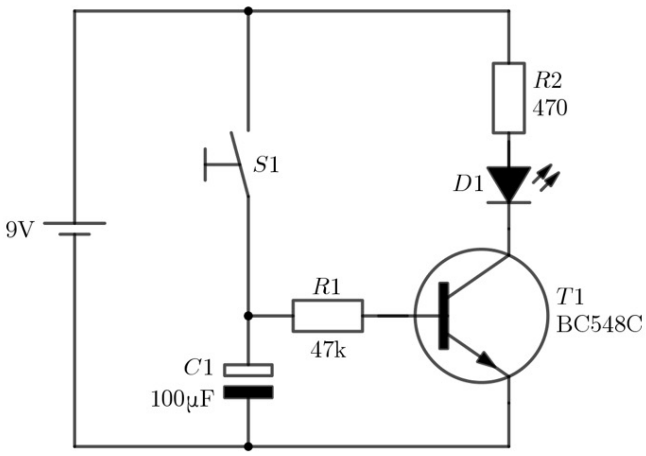
Fazit

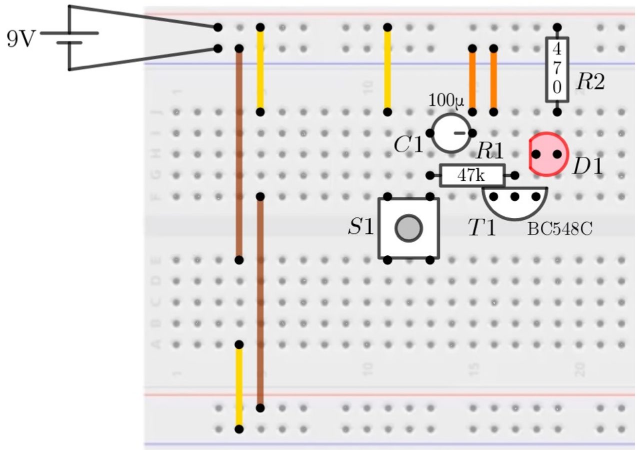
Die Kombination eines Kondensators mit einem Widerstand dient uns in unseren Schaltungen als eine Art "Timer". Man bezeichnet eine solche Zeitschaltung auch als *RC-Kreis*. Dabei ist die entscheidende Kenngrösse die Zerfallskonstante λ, also das Inverse des Produkts aus R und C, aus der wir auch sehr direkt und einfach die Halbwertzeit $T_{1/2}$ berechnen können:

$$\lambda = \frac{1}{RC} \qquad \Rightarrow \qquad T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda} = RC \cdot \ln(2)$$

2.5 Endlich am Ziel – die Zeitschaltung

Wir fügen nun das neu Gesehene zusammen: Anstatt mit einem Kondensator direkt eine LED zu versorgen, die dann nach sehr kurzer Zeit wieder erlischt – und bei der wir eigentlich auch über die LED und ihren Vorwiderstand Bescheid wissen müssten, um vorauszusagen, wie rasch das Erlöschen vor sich geht – benutzen wir unseren RC-Timer, um die Öffnung eines Transistors und damit das Leuchten einer LED zu steuern:





- Erläuterung der Schaltung: Wird $S1$ gedrückt, so lädt sich der Kondensator $C1$ schlagartig auf. Lässt man $S1$ wieder los, so herrschen über dem geladenen Kondensator anfänglich $9\,\mathrm{V}$, die via $R1$ auch mit der Basis des Transistors $T1$ verbunden sind und diesen offen halten. Die LED leuchtet also auf Knopfdruck und leuchtet auch nach dem Loslassen von $S1$ noch weiter. Erst nach etwa $12\,\mathrm{s}$ hat sich die Spannung über $C1$ über $R1$ und $T1$ soweit abgebaut, dass der Transistor sich langsam zu schliessen beginnt. Die Helligkeit der LED nimmt nun ab, bis wir nach etwa $25\,\mathrm{s}$ nichts mehr leuchten sehen.

  Bemerkenswert sind die $12\,\mathrm{s}$ die nun genau der Berechnung auf Seite 7 entsprechen.

- Wir erkennen die modulare Logik im Schaltschema. Links entsprechen der Taster $S1$, der Kondensator $C1$ und der Widerstand $R1$ unserem elektronischen Timer, also einem RC-Kreis. Hier geht es um Steuerung und wir arbeiten mit kleinen Strömen. Rechts wird die LED $D1$ über den Transistor $T1$ geöffnet oder geschlossen. D.h. der Transistor $T1$ regelt den Laststrom. Er wird durch den RC-Kreis links gesteuert. Diese modulartige Denkweise ist essentiell für das Verständnis grösserer Schaltungen.