

Scheinkräfte in rotierenden Bezugssystemen

1 Die Winkelgeschwindigkeit als Vektor $\vec{\omega}$

Rotierendes System: Auf diesen Seiten betrachten wir die Bewegung von Körpern in Bezugssystemen, die relativ zu einem Inertialsystem *rotieren*. Die rotierenden Koordinatenachsen sind dabei in der Regel fest mit einem starren Körper verbunden. Das wichtigste Beispiel ist ein Satz von Achsen, die fest mit der rotierenden Erde verbunden sind.

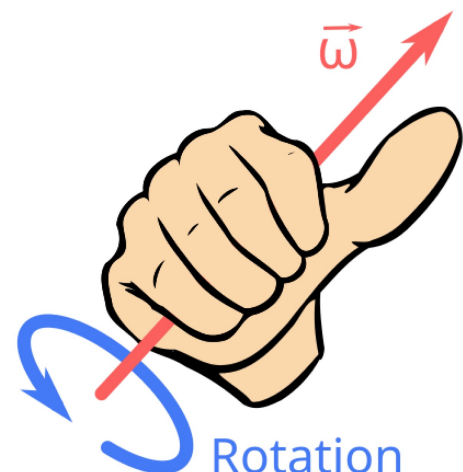
Fester Rotationspunkt: Bei der Diskussion von Drehbewegungen starrer Körper gibt es eigentlich nur zwei Fälle, mit denen wir uns beschäftigen müssen: Manchmal rotiert der Körper um einen Punkt des Körpers, der (in einem bestimmten Inertialsystem) fest ist; Beispiele dafür sind ein Rad, das sich um eine feste Achse dreht, oder ein schwingendes Pendel, das an einem festen Punkt aufgehängt ist. Wenn der Körper nicht um einen festen Punkt rotiert (beispielsweise ein Ball, der durch die Luft fliegt und sich dabei dreht), gehen wir in zwei Schritten vor: Zunächst bestimmen wir die Bewegung des Schwerpunkts, und dann untersuchen wir die Drehbewegung des Körpers in seinem Schwerpunktsystem. In diesem Schwerpunktsystem ist – der Name sagt es – der Schwerpunkt fest. Damit geht es also bei der Untersuchung eines rotierenden Körpers auf jeden Fall um einen Körper, bei dem mindestens ein Punkt effektiv fest ist. Sinnvollerweise legen wir diesen Punkt in den Ursprung O des Koordinatensystems. Eine *Rotationsachse*, um die der Körper rotiert, muss durch O verlaufen.¹

Die vektorielle Winkelgeschwindigkeit: Zur vollständigen Beschreibung der Drehbewegung benötigen wir die Angabe der *Drehachse* und ebenso die *Rotationsrate*, also die *Drehgeschwindigkeit*. Die Richtung der Drehachse kann man mit einem *Einheitsvektor* \vec{e}_u angeben, die Drehgeschwindigkeit mit einer *Winkelgeschwindigkeit* $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Beispielsweise könnte sich ein Karussell mit $\omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$ um eine vertikale Achse \vec{u} drehen.

Es ist oftmals bequem, den Einheitsvektor \vec{e}_u mit ω zu kombinieren; damit erhält man den **Vektor der Winkelgeschwindigkeit**

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_u \quad (1)$$

Dieser Vektor $\vec{\omega}$ gibt sowohl die *Richtung der Drehachse* (nämlich \vec{u} , d.h. die Richtung von $\vec{\omega}$), als auch die *Drehgeschwindigkeit* an (nämlich ω , den Betrag von $\vec{\omega}$). Allerdings ist der Vektor $\vec{\omega}$ bislang noch nicht eindeutig definiert. Um beim Beispiel mit dem Karussell von vorhin zu bleiben: Wenn es sich um eine vertikale Achse dreht, zeigt der Vektor $\vec{\omega}$ dann nach oben oder nach unten? Wir beseitigen diese Mehrdeutigkeit mithilfe der *Rechte-Hand-Regel* (RHR) und wählen die Richtung von $\vec{\omega}$ so, dass die Finger der rechten Hand in die Drehrichtung zeigen, wenn der rechte Daumen in die Richtung von $\vec{\omega}$ weist. Alternativ kann man die Konvention treffen, dass man den Körper im Uhrzeigersinn rotieren sieht, wenn man in Richtung von $\vec{\omega}$ blickt. Resp. umgekehrt: Kommt mir der Vektor $\vec{\omega}$ entgegen, so sehe ich den Körper im Gegenuhrzeigersinn rotieren.



¹Diese Aussage ist nur ziemlich schwer zu beweisen, doch sie erscheint so selbstverständlich, dass ich hoffe, es ist in Ordnung, wenn wir sie hier auch ohne Beweis akzeptieren.

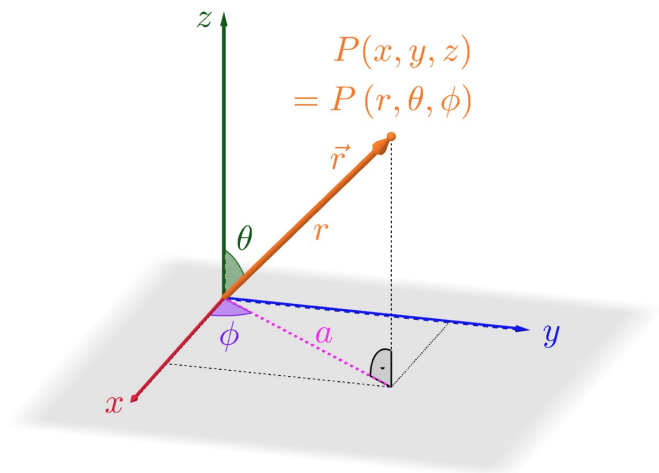
Veränderbare Winkelgeschwindigkeit: Es ist wichtig sich klarzumachen, dass sich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit der Zeit *ändern* kann: Wenn sich die Drehgeschwindigkeit verändert, ändert sich der Betrag von $\vec{\omega}$; wenn sich die Drehachse verändert, ändert $\vec{\omega}$ seine Richtung. Wenn beispielsweise ein Raumschiff außer Kontrolle gerät und zu taumeln beginnt, ändert die Winkelgeschwindigkeit meist sowohl ihren Betrag als auch ihre Richtung. In einem solchen Fall ist $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ die momentane Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t . Es gibt andererseits viele interessante Fälle, in denen $\vec{\omega}$ konstant ist (in Betrag und Richtung). Das gilt beispielsweise in hervorragender Näherung für die Winkelgeschwindigkeit der um ihre Achse rotierenden Erde.

2 Kugelkoordinaten

Einen Punkt P im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 beschreiben wir in der Vektorgeometrie normalerweise durch Angabe eines *kartesischen* Koordinatentripels resp. durch einen entsprechenden *Ortsvektor*:

$$P(x, y, z) \quad \text{resp.} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

So ähnlich, wie wir in der Ebene zu Polarkoordinaten wechseln können, gibt es nun auch im Raum die Möglichkeit zu sogenannten **Kugelkoordinaten** überzugehen. Dies empfiehlt sich typischerweise bei der Untersuchung *kugelsymmetrischer* Probleme – die Mathematik des Problems wird dadurch in der Regel einfacher. Wegen der Dreidimensionalität des Raumes werden immer noch drei Angaben (r, θ, ϕ) zur Beschreibung eines Ortes \vec{r} benötigt:



- Der **Abstand** r zum Ursprung,
- der **Azimutwinkel** ϕ (= Drehwinkel in der x - y -Ebene),
- der **Polarwinkel** θ (= Winkel zwischen der z -Achse und dem Ortsvektor \vec{r}).

Die kartesischen Koordinaten von P lassen sich relativ leicht aus dessen Kugelkoordinaten berechnen. So erkennen wir in obiger Grafik zunächst, dass:

$$z = r \cos \theta \quad \text{und} \quad a = r \sin \theta$$

Sobald man a kennt, folgt für x und y :

$$x = a \cos \phi = r \sin \theta \cos \phi \quad \text{und} \quad y = a \sin \phi = r \sin \theta \sin \phi$$

Somit lässt sich für den kartesischen Ortsvektor \vec{r} des Punktes P schreiben:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \sin \theta \\ r \sin \phi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Natürlich gibt es auch in die Gegenrichtung entsprechende Umrechnungen, aber damit brauchen wir uns nicht auseinanderzusetzen. Nur die offensichtlichste davon sei hier rasch notiert:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (3)$$

3 Eine nützliche Beziehung: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Es gibt einen wichtigen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, mit der sich ein Körper dreht, und der linearen Geschwindigkeit \vec{v} eines beliebigen Punkts P dieses Körpers.

Werfen wir beispielsweise einen Blick auf die Erde, die sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um eine Achse durch ihren (stationär angenommenen) Mittelpunkt O dreht. Betrachten wir nun einen beliebigen, aber auf der Erdoberfläche festen Punkt P , beispielsweise unser Schulzimmer, mit einer gewissen Position \vec{r} relativ zu O . Wir können \vec{r} durch Kugelkoordinaten (r, θ, φ) angeben, wenn die z -Achse durch den Nordpol verläuft. Der Polarwinkel θ ist dann die sogenannte *Komplementbreite* oder *Kolatitute*. (Komplementbreite deshalb, weil man die übliche geografische Breite vom Äquator aus zum Pol hin misst.)

Bei der Drehung der Erde um ihre Achse bewegt sich der Punkt P in östlicher Richtung auf seinem Breitenkreis c mit einem Radius von $\varrho = r \sin \theta$. Somit ist der Betrag v der Bahngeschwindigkeit \vec{v} gegeben durch

$$v = \omega \varrho = \omega r \sin \theta \quad (4)$$

Und wenn wir in der Abbildung oben die Richtungen der verschiedenen Vektoren betrachten, dann erkennen wir, dass das *Vektorprodukt* $\vec{\omega} \times \vec{r}$ gerade den Geschwindigkeitsvektor \vec{v} ergibt. Das stimmt sogar inklusive des durch (4) gegebenen Betrages, denn:

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin \theta = \omega r \sin \theta = v$$

Es gilt also tatsächlich vektoriell:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (5)$$

Es ist leicht zu erkennen, dass dieses Ergebnis nicht von der Art des rotierenden Körpers abhängt; sie gilt für jeden Punkt eines starren Körpers, der mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ rotiert, wenn wir den Ursprung O auf die Drehachse legen.

(5) ist natürlich eine Verallgemeinerung des Zusammenhangs $v = \omega r$, den wir für die Bahngeschwindigkeit eines Punkts auf dem Umfang eines sich drehenden Rades mit dem Radius r bereits kennen.

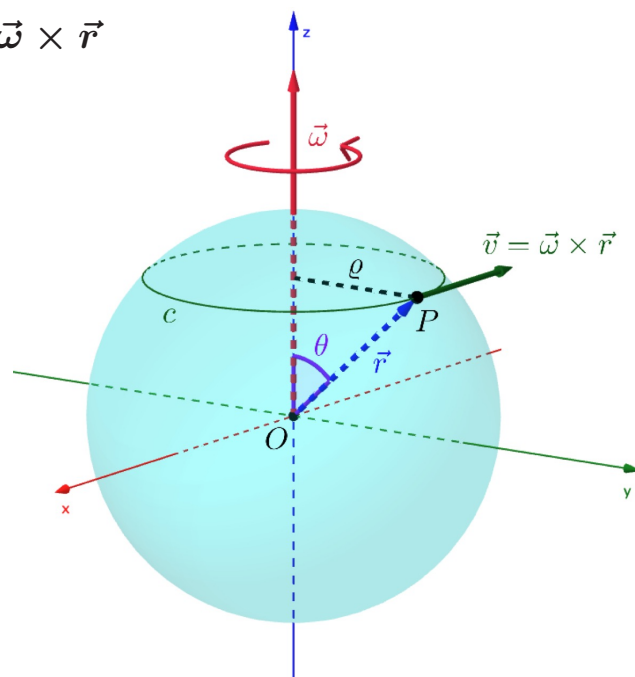
Tatsächlich beschreibt (5) die momentane *Veränderungsrate* eines **beliebigen (!)** mit dem starren Körper verbundenen Vektors aufgrund der durch $\vec{\omega}$ beschriebenen Drehbewegung. Es handelt sich dabei also um die *zeitliche Ableitung* des Vektors (aufgrund von $\vec{\omega}$)! So ist im Falle des Ortsvektors \vec{r} die Geschwindigkeit \vec{v} eben die zeitliche Veränderungsrate des Ortes \vec{r} , wie wir ja bereits wissen:

$$\text{allgemein: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{und bei durch } \vec{\omega} \text{ beschriebener Drehbewegung speziell: } \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (6)$$

Das gilt nun aber für beliebige Vektoren! Wenn beispielsweise \vec{e} ein mit dem Körper verbundener Einheitsvektor ist, dann ist seine Änderungsgeschwindigkeit aufgrund der momentan vorhandenen Rotation $\vec{\omega}$ (betrachtet in einem nicht-rotierenden Bezugssystem) eben durch

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{e} \quad (7)$$

gegeben. Dieses Ergebnis werden wir in Kürze anwenden.



4 Die Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Bezugssystems: $\vec{\Omega}$

Bei der Notation von Winkelgeschwindigkeiten folgen wir normalerweise folgender Konvention: Wir verwenden den kleinen Buchstaben $\vec{\omega}$ für die Winkelgeschwindigkeit der Drehbewegung eines Körpers in irgendeinem Bezugssystem. Und auf der anderen Seite verwenden wir den Großbuchstaben $\vec{\Omega}$ für die *Winkelgeschwindigkeit eines rotierenden Bezugssystems* (= Nicht-Inertialsystem) relativ zu einem Inertialsystem. Diese Unterscheidung ist ganz analog zu der Konvention unserer bisheriger Betrachtungen von beschleunigten Bezugssystemen, in denen wir die Großbuchstaben \vec{A} und \vec{V} für die Beschleunigung bzw. die Geschwindigkeit eines Nicht-Inertialsystems bezüglich eines Inertialsystems verwendet haben.

In der Praxis ist $\vec{\Omega}$ meist eine gegebene, bekannte Winkelgeschwindigkeit, etwa die Winkelgeschwindigkeit der Erde, die sich einmal pro Tag um ihre Achse dreht. Im Folgenden werden wir uns nun mit der Bewegung von Körpern in einem rotierenden Bezugssystem S befassen; gemäß unserer Konvention bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit dieses Systems aus der Sicht eines Inertialsystems S_0 mit $\vec{\Omega}$.

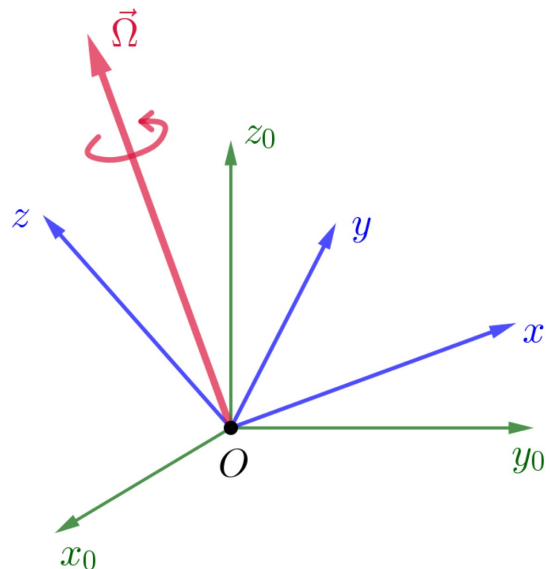
5 Zeitableitungen in einem rotierenden Bezugssystem

Nun sind wir bereit für die Untersuchung der Bewegungsgleichungen für einen Körper in einem Bezugssystem S , das mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ relativ zu einem Inertialsystem S_0 rotiert. Unsere Schlussfolgerungen gelten aber für ein beliebiges rotierendes Bezugssystem; das bei Weitem wichtigste Beispiel ist ein Bezugssystem, das mit der rotierenden Erde verbunden ist, und dieses Beispiel wollen wir immer im Hinterkopf behalten. Legen wir deshalb eine kurze Pause ein und berechnen wir die Rotationsgeschwindigkeit der Erde, die sich innerhalb von 24 Stunden einmal um ihre Achse dreht.² Ein fest mit der Erde verbundenes Bezugssystem hat also die Rotationsgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \cdot 3600 \text{ s}} \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad (8)$$

Nur weil dieser Wert so gering, ist, können wir ihn oft gänzlich vernachlässigen. Wir können aber zeigen, dass die Drehung der Erde messbare Auswirkungen beispielsweise auf die Bewegung von Geschossen, von Pendeln und von anderen Systemen hat. Ferner gibt es andere Nicht-Inertialwirkungen (insbesondere die Gezeiten), die mit der Bahnbewegung von Erde und Mond zusammenhängen. Sie spielen allerdings bei den Systemen, die wir hier behandeln wollen, eine weit weniger wichtige Rolle, sodass wir sie fürs Erste vernachlässigen können.

Wir wollen annehmen, dass die beiden Systeme S und S_0 – wie in der Abbildung rechts gezeigt – einen gemeinsamen Ursprung O haben. Die einzige Bewegung von S relativ zu S_0 ist also eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$. Der gemeinsame Ursprung O könnte beispielsweise der Erdmittelpunkt sein, S könnte ein Satz von fest mit der Erde verbundenen Koordinatenachsen sein und S_0 ein Satz von Achsen mit demselben Ursprung, deren Richtungen aber bezüglich weit entfernter Sterne fest sind. Das Bezugssystem S ist zwar bequem zu verwenden, ist aber kein Inertialsystem; das System S_0 ist in seiner Verwendung relativ unbequem, ist aber inertial.



²Genaugenommen ist die Dauer für eine Erdrotation ein **siderischer Tag**, d.h. die Zeit, in der sich die Erde relativ zu einem weit entfernten Stern einmal um ihre Achse dreht. Dieser Wert ist um einen Faktor 365/366 kürzer als der **Sonnentag**, doch die Differenz ist so klein, dass wir uns hier nicht darum kümmern müssen.

Betrachten wir nun einen beliebigen Vektor \vec{Q} . Das kann beispielsweise der Geschwindigkeits- oder der Ortsvektor eines Körpers oder irgendein anderer Vektor von Interesse sein. Unsere erste Aufgabe besteht darin, die in S_0 gemessene zeitliche Änderungsrate von \vec{Q} mit der entsprechenden in S gemessenen Rate zu verbinden. Um diese beiden Änderungsraten voneinander zu unterscheiden, benutzen wir zeitweilig folgende Schreibweise:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\begin{array}{l} \text{Änderungsrate des Vektors } \vec{Q} \\ \text{relativ zum Inertialsystem } S_0 \end{array}\right)$$

und

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S = \left(\begin{array}{l} \text{Änderungsrate desselben Vektors } \vec{Q} \\ \text{relativ zum rotierenden Bezugssystem } S \end{array}\right)$$

Um diese beiden Änderungsraten miteinander zu vergleichen, stelle ich den Vektor \vec{Q} mithilfe der drei orthogonalen Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z dar, die fest mit dem rotierenden System S verbunden sind. Damit haben wir:

$$\vec{Q} = Q_x \vec{e}_x + Q_y \vec{e}_y + Q_z \vec{e}_z \quad (9)$$

Diese Darstellung ist so gewählt, dass sie für einen Beobachter im Bezugssystem S besonders bequem ist, weil die Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z fest mit diesem System verbunden sind. Q_x , Q_y und Q_z sind dann die Komponenten von \vec{Q} im System S , also bezüglich dieser Einheitsvektoren.

Natürlich gibt es eine gleiche Darstellung des Vektors \vec{Q} auch im Inertialsystem S_0 :

$$\vec{Q} = Q_{x,0} \vec{e}_{x,0} + Q_{y,0} \vec{e}_{y,0} + Q_{z,0} \vec{e}_{z,0} \quad (10)$$

Der einzige Unterschied ist, dass die Vektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z für einen Beobachter in S fest sind, für einen Beobachter in S_0 hingegen rotieren, während es bei den Vektoren $\vec{e}_{x,0}$, $\vec{e}_{y,0}$ und $\vec{e}_{z,0}$ gerade andersum ist.

Leiten wir nun die Darstellung (9) in beiden Bezugssystemen nach der Zeit ab. Im Bezugssystem S sind die Vektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z konstant und wir erhalten einfach:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S = \frac{dQ_x}{dt} \vec{e}_x + \frac{dQ_y}{dt} \vec{e}_y + \frac{dQ_z}{dt} \vec{e}_z \quad (11)$$

Dabei sind $\frac{dQ_x}{dt}$, $\frac{dQ_y}{dt}$ und $\frac{dQ_z}{dt}$ die Veränderungsrate der Vektorkomponenten von \vec{Q} im System S .

Im Bezugssystem S_0 verändern sich hingegen die Vektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z ebenfalls mit der Zeit. Die zeitliche Ableitung von (9) ergibt also unter dreifacher Verwendung der Produktregel:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \underbrace{\frac{dQ_x}{dt} \vec{e}_x + Q_x \frac{d\vec{e}_x}{dt}}_{=\left(\frac{d}{dt}(Q_x \vec{e}_x)\right)_{S_0}} + \underbrace{\frac{dQ_y}{dt} \vec{e}_y + Q_y \frac{d\vec{e}_y}{dt}}_{=\left(\frac{d}{dt}(Q_y \vec{e}_y)\right)_{S_0}} + \underbrace{\frac{dQ_z}{dt} \vec{e}_z + Q_z \frac{d\vec{e}_z}{dt}}_{=\left(\frac{d}{dt}(Q_z \vec{e}_z)\right)_{S_0}} \quad (12)$$

Nun lassen sich die Ableitungen der Einheitsvektoren leicht mithilfe der "nützlichen Beziehung" (7) darstellen. Die Vektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z sind fest mit dem System S verbunden, das sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ relativ zu S_0 dreht. Die Änderungsrate dieser Vektoren sind somit gegeben durch

$$\frac{d\vec{e}_x}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_x, \quad \frac{d\vec{e}_y}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_y \quad \text{und} \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{e}_z \quad (13)$$

womit wir für (12) neu schreiben:

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \frac{dQ_x}{dt} \vec{e}_x + Q_x (\vec{\Omega} \times \vec{e}_x) + \frac{dQ_y}{dt} \vec{e}_y + Q_y (\vec{\Omega} \times \vec{e}_y) + \frac{dQ_z}{dt} \vec{e}_z + Q_z (\vec{\Omega} \times \vec{e}_z) \quad (14)$$

Dieses Ergebnis stellen wir um und fassen geeignet zusammen:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} &= \frac{dQ_x}{dt}\vec{e}_x + Q_x(\vec{\Omega} \times \vec{e}_x) + \frac{dQ_y}{dt}\vec{e}_y + Q_y(\vec{\Omega} \times \vec{e}_y) + \frac{dQ_z}{dt}\vec{e}_z + Q_z(\vec{\Omega} \times \vec{e}_z) \\
&= \underbrace{\frac{dQ_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dQ_y}{dt}\vec{e}_y + \frac{dQ_z}{dt}\vec{e}_z}_{=\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S} + \vec{\Omega} \times (Q_x\vec{e}_x + Q_y\vec{e}_y + Q_z\vec{e}_z) \\
&= \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \underbrace{(Q_x\vec{e}_x + Q_y\vec{e}_y + Q_z\vec{e}_z)}_{=\vec{Q}}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir sowohl (11), als auch (9) verwendet und zudem von der *Bilinearität* und der *Distributivität* des Vektorproduktes Gebrauch gemacht.³ Somit erhalten wir insgesamt für die Ableitung von \vec{Q} im System S_0 :

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{Q} \quad (15)$$

Diese wichtige Gleichung verbindet die Ableitung eines beliebigen Vektors \vec{Q} (gemessen in dem Inertialsystem S_0) mit der entsprechenden Ableitung im rotierenden Bezugssystem S .

6 Das Aktionsprinzip in einem rotierenden Bezugssystem

Nun sind wir soweit, dass wir die Form des 2. Newton'schen Axioms (= *Aktionsprinzip*) in einem rotierenden Bezugssystem S bestimmen können. Um die Angelegenheit zu vereinfachen, werden wir annehmen, dass die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ von S bezüglich S_0 konstant ist, so wie es (zumindest in hervorragender Näherung) für eine fest mit der rotierenden Erde verbundene Achse gilt.

Betrachten wir nun ein Teilchen der Masse m mit dem Ortsvektor \vec{r} . Im Inertialsystem S_0 unterliegt das Teilchen dem Aktionsprinzip in seiner gewohnten Form

$$m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \vec{F} \quad (16)$$

Dabei bezeichnet wie üblich \vec{F} die *resultierende Kraft* auf das Teilchen, d.h. die Vektorsumme aller Kräfte, die wir in dem Inertialsystem ermittelt haben. Die Ableitung auf der linken Seite ist natürlich die Ableitung, wie sie ein Beobachter im Inertialsystem S_0 , bestimmt. Wir können diese Ableitung nun aber mithilfe von Gleichung (15) durch die Ableitungen ausdrücken, die im rotierenden System S bestimmt werden. Zunächst gilt gemäss (15):

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (17)$$

Für die zweite Ableitung schreiben wir zunächst:

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0} \underbrace{\left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r}\right]}_{=:\vec{a}}$$

Hierin ist $\vec{a} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ selber wieder ein Vektor, auf den die durch (15) gegebene Vorschrift für die Ableitung im System S_0 , also $\left(\frac{d}{dt}\right)_{S_0}$, erneut angewendet wird.

³Bilinearität: $k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b})$. Distributivität: $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Das ist bestimmt ein wenig verwirrend, wenn man es das erste Mal sieht. Diese Verwirrlichkeit ist aber vor allem der Notation geschuldet. Daher schreibe ich diese neuerliche Ableitung mittels (15) zuerst unter Verwendung des Vektors \vec{a} auf und setze danach den grösseren Ausdruck für \vec{a} dafür zurück ein:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} &= \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_{S_0} = \left(\frac{d\vec{a}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{a} \\ &= \left(\frac{d}{dt}\right)_S \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] + \vec{\Omega} \times \left[\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] \\ &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S + \left(\frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

Dabei habe ich im letzten Schritt einmal mehr die Summenregel für die Ableitung und die Distributivität des Vektorproduktes verwendet.

Dieses Ergebnis sieht ziemlich unübersichtlich aus, doch wir können es ein wenig aufräumen:

1. Wir wollen, wie bereits früher gesagt, von einer konstanten Drehbewegung ausgehen. Dann ist $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$ (das gilt in beiden Bezugssystemen). Dadurch vereinfacht sich der zweite Summand von oben aufgrund der auch mit dem Vektorprodukt funktionierenden Produktregel für Ableitungen:

$$\left(\frac{d(\vec{\Omega} \times \vec{r})}{dt}\right)_S = \underbrace{\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S}_{=0} \times \vec{r} + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S = \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S \quad (18)$$

So schreiben wir insgesamt neu:

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

2. Da es ja unser Hauptanliegen ist, die Ableitungen im rotierenden System S zu erhalten, beleben wir die *Punktschreibweise* für diese Ableitungen (*Newton-Notation*) wieder. Wir bezeichnen also die Ableitung eines beliebigen Vektors \vec{Q} im rotierenden Bezugssystem S mit $\dot{\vec{Q}}$:

$$\dot{\vec{Q}} := \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_S \quad \Rightarrow \quad \text{insbesondere: } \dot{\vec{r}} := \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S \quad \text{und} \quad \ddot{\vec{r}} := \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_S$$

Somit folgt für unsere zweite Ableitung von \vec{r} in S :

$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = \ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (19)$$

Jetzt sieht das schon übersichtlicher aus. Nun setzen wir (19) ins Aktionsprinzip (16) ein:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)_{S_0} = m \cdot \left(\ddot{\vec{r}} + 2\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\right) \\ &= m\ddot{\vec{r}} + 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} + m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r})\end{aligned}$$

Wir wollen nach $m\ddot{\vec{r}}$ auflösen, denn das ist die scheinbare "resultierende Kraft" im rotierenden Bezugssystem S . Wir erhalten:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}} - m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{F} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$$

Dabei habe ich zweimal ausgenutzt, dass $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ ist.

Halten wir dieses Resultat nochmals ganz übersichtlich fest, denn nun haben wir das Aktionsprinzip für das konstant mit $\vec{\Omega}$ rotierende Bezugssystem S gefunden:

$$\text{Aktionsprinzip im rotierenden System } S: \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad (20)$$

Hier bezeichnet \vec{F} wie üblich die Vektorsumme aller Kräfte, die in einem beliebigen Inertialsystem ermittelt wurden. Wie bei früher betrachteten beschleunigten Bezugssystemen ergibt sich, dass die Bewegungsgleichung in einem rotierenden Bezugssystem genauso aussieht wie das zweite Newton'sche Gesetz, es kommen nun aber zwei Zusatzterme auf der Kraftseite der Gleichung hinzu. Der erste dieser Terme wird als **Coriolis-Kraft** bezeichnet (benannt nach dem französischen Physiker *Gaspard Gustave de Coriolis*, 1792 – 1843, der sie als Erster erklärte):

$$\vec{F}_{\text{Cor}} = 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad . \quad (21)$$

Der zweite dieser Zusatzterme ist die sogenannte **Zentrifugalkraft**

$$\vec{F}_{\text{Zfug}} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad . \quad (22)$$

An dieser Stelle ist zunächst wichtig, dass wir das Newton'sche Aktionsprinzip also auch in rotierenden (d.h. nicht-inertialen) Bezugssystemen verwenden können, solange wir nicht vergessen, immer die beiden "fiktiven" Kräfte (man spricht von *Scheinkräften*) zu der für ein Inertialsystem berechneten Gesamtkraft \vec{F} hinzuzufügen. In einem rotierenden Bezugssystem gilt also kurz also:

$$\text{Aktionsprinzip im rotierenden System } S: \quad m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{F}_{\text{Zfug}} \quad (23)$$

7 Die Zentrifugalkraft

Um das Aktionsprinzip in einem rotierenden Bezugssystem anwenden zu können, müssen wir – wie gerade gesehen – zwei Scheinkräfte einführen, die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft. Bis zu einem gewissen Grad können wir die beiden Kräfte separat behandeln. Insbesondere ist die Coriolis-Kraft auf einen Körper proportional zu dessen Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ relativ zum rotierenden Bezugssystem S . Daher ist \vec{F}_{Cor} für einen in S ruhenden Körper null, und sie ist vernachlässigbar, wenn der Körper sich im rotierenden Bezugssystem nur langsam bewegt.

Im Folgenden werden wir uns hauptsächlich mit einem rotierenden erdfesten Bezugssystem befassen, für das wir die relative Bedeutsamkeit der beiden Scheinkräfte leicht abschätzen können. Weil in beiden Kräften Vektorprodukte vorkommen, hängen sie zwar von den Richtungen der jeweiligen Vektoren ab, doch für eine Abschätzung der Größenordnung reichen die Annahmen

$$F_{\text{Cor}} \simeq mv\Omega \quad \text{und} \quad F_{\text{Zfug}} \simeq mr\Omega^2$$

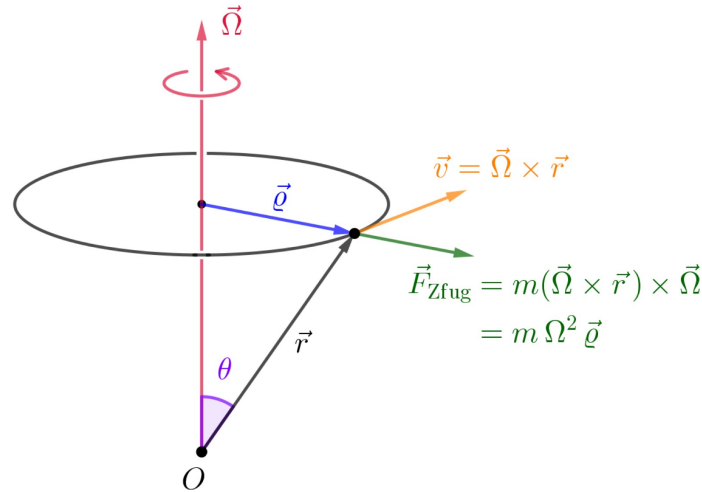
Darin ist v die Geschwindigkeit des Körpers relativ zum rotierenden erdfesten System, also die übliche Geschwindigkeit, wie wir sie z.B. auf der Erdoberfläche wahrnehmen. Daher gilt:

$$\frac{F_{\text{Cor}}}{F_{\text{Zfug}}} \simeq \frac{mv\Omega}{mr\Omega^2} = \frac{v}{r\Omega} \simeq \frac{v}{R\Omega} \simeq \frac{v}{V} \quad (24)$$

Hier habe ich für die Variable r den Erdradius R eingesetzt. (Mit dem Ursprung im Erdmittelpunkt gilt für Objekte nahe der Erdoberfläche $r \simeq R$.) Am Schluss habe ich $R\Omega$ durch V ersetzt, d.h. durch die Geschwindigkeit eines Punkts auf dem Äquator, wenn die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ rotiert. Da V bei etwa $460 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ liegt, zeigt obiges Verhältnis, dass man für Objekte mit $v < 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in erster guter Näherung die Coriolis-Kraft vernachlässigen kann.⁴ Die Zentrifugalkraft ist nach (22) gegeben durch

$$\vec{F}_{\text{Zfug}} = m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} \quad .$$

⁴Wie wir später sehen werden, hat die Coriolis-Kraft allerdings auch für $v < 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nennenswerte Auswirkungen (beispielsweise beim Foucault'schen Pendel). Dennoch ist natürlich richtig, dass F_{Cor} im Vergleich zu F_{Zfug} klein ist. Daher scheint es sinnvoll, die Coriolis-Kraft in erster Näherung zu vernachlässigen.



Anhand der obigen Abbildung können wir uns klarmachen, wie das aussieht. Wir sehen einen Körper auf der Erdoberfläche bei einer Komplementbreite θ . Die Erddrehung trägt den Körper entlang eines Breitenkreises, und der Vektor $\vec{v} = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ (also die Bahngeschwindigkeit dieser Kreisbewegung, beobachtet im Inertialsystem S_0) ist tangential zu diesem Kreis. Daher zeigt der Vektor $(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$ von der Drehachse radial nach außen in die Richtung von \vec{e}_ϱ (mit Einheitsvektor \vec{e}_ϱ). Den Betrag von $(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega}$ bestimmt man leicht zu $\Omega^2 r \sin \theta = \Omega^2 \varrho$. Damit gilt:

$$\vec{F}_{Zfug} = m \Omega^2 \varrho \cdot \vec{e}_\varrho = m \Omega^2 \cdot \vec{\varrho} \quad \text{mit} \quad \vec{\varrho} = \varrho \cdot \vec{e}_\varrho \quad (25)$$

8 Die Coriolis-Kraft

In (21) steht die Ableitung $\dot{\vec{r}}$ für die Veränderungsrate des im rotierenden System S gemessenen Ortsvektors \vec{r} , also für die Geschwindigkeit \vec{v} des Körpers im System S :

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \text{Geschwindigkeit des Körpers im rotierenden System } S \quad (26)$$

Nur wenn sich der Körper in S bewegt und somit $\vec{v} \neq 0$ ist, entsteht die Coriolis-Kraft \vec{F}_{Cor} , also eine Scheinkraft, die wir berücksichtigen müssen, wenn wir das Aktionsprinzip in S anwenden wollen:

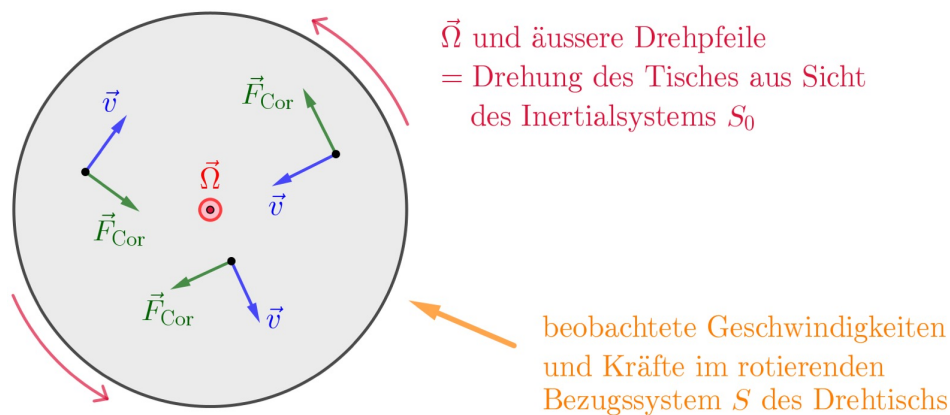
$$\vec{F}_{Cor} = 2m \dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = 2m \vec{v} \times \vec{\Omega} \quad . \quad (27)$$

Der Betrag der Coriolis-Kraft

Die Stärke einer Coriolis-Kraft hängt sowohl von den Beträgen von \vec{v} und $\vec{\Omega}$, als auch von deren relativer Orientierung ab. Für die rotierende Erde haben wir in (8) gesehen, dass $\Omega \approx 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ beträgt. Für einen Körper mit $v \approx 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (entsprechend einem schnellen Tennisball) ergibt sich für die maximale Beschleunigung aufgrund der Coriolis-Kraft (das ist der Fall für \vec{v} senkrecht zu $\vec{\Omega}$)

$$a_{\max} = 2v\Omega \approx 2 \cdot 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 0.0073 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad . \quad (28)$$

Verglichen mit der Gravitationsbeschleunigung von $9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist das ein sehr kleiner Wert, allerdings durchaus messbar, wenn man den Aufwand betreiben will. Doch etliche Geschosse wie Raketen oder langreichweitige Granaten bewegen sich deutlich schneller als $50 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, und dann ist die Coriolis-Kraft für sie entsprechend bedeutsamer. Außerdem gibt es, wie wir sehen werden, Systeme wie das Foucault'sche Pendel, für die die Coriolis-Kraft zwar klein ist, aber über einen langen Zeitraum wirkt und damit eine große Wirkung erzielen kann.



Die Richtung der Coriolis-Kraft

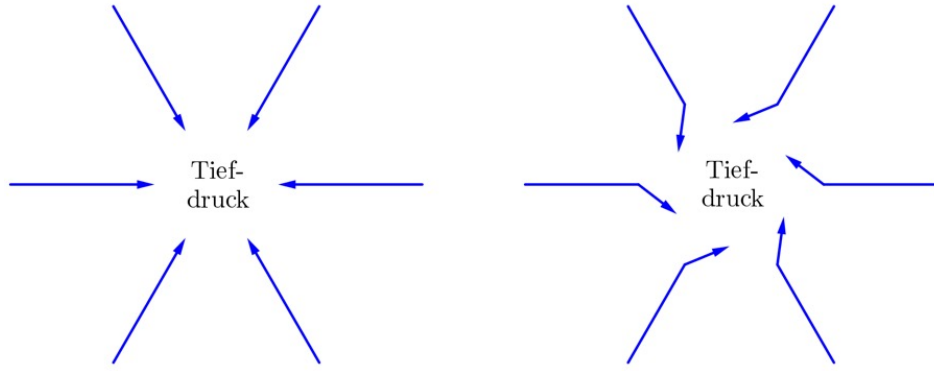
Die Coriolis-Kraft $2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$ wirkt aufgrund des Vektorproduktes immer senkrecht zur Geschwindigkeit \vec{v} des bewegten Objekts.⁵ Ihre Richtung wird durch die **Drei-Finger-Regel (3FR)** der rechten Hand bestimmt. In der Abbildung oben sehen wir von oben auf einen horizontalen Drehtisch, der entgegen dem Uhrzeigersinn relativ zum Labor rotiert. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ zeigt senkrecht nach oben (in der Abbildung aus der Zeichenebene heraus in unsere Richtung). Wenn wir ein Objekt betrachten, das sich rollend oder gleitend auf dem Drehtisch bewegen kann, sieht man leicht, dass die Coriolis-Kraft unabhängig von Ort und Geschwindigkeit des Objekts dessen Geschwindigkeitsrichtung nach rechts ablenken will. Entsprechend gibt es durch die Coriolis-Kraft eine Ablenkung nach links, wenn wir den Drehtisch im Uhrzeigersinn rotieren lassen. (Ob das Objekt auch tatsächlich in die angegebenen Richtungen abgelenkt wird, hängt natürlich davon ab, ob weitere Kräfte wirken und wie stark sie sind.)

Wir können uns vorstellen, dass die Abbildung oben die Nordhalbkugel der Erde zeigt, gesehen von einem Punkt oberhalb des Nordpols. (Da die Erde sich nach Osten dreht, ist die Winkelgeschwindigkeit genauso gerichtet wie in der Abbildung dargestellt.) Damit kommen wir zu dem Schluss, dass die Coriolis-Kraft aufgrund der Erddrehung sich bewegende Körper auf der Nordhalbkugel nach rechts (und auf der Südhalbkugel entsprechend nach links) ablenken will.⁶ Dieser Effekt spielt für langreichweitige Geschosse eine wichtige Rolle. Man muss daher auf der Nordhalbkugel links neben das Ziel zielen, entsprechend rechts neben das Ziel auf der Südhalbkugel. Ein wichtiges Beispiel aus der Meteorologie sind die tropischen Wirbelstürme. Sie entstehen, wenn die Luft außerhalb eines Tiefdruckgebiets sich schnell nach innen bewegt. Wegen des Coriolis-Effekts wird die strömende Luft, wie in der nächsten Abbildung gezeigt, nach rechts abgelenkt und beginnt dann entgegen dem Uhrzeigersinn zu zirkulieren (das gilt für die Nordhalbkugel; auf der Südhalbkugel zirkuliert die Luftströmung im Uhrzeigersinn). Wenn dies genügend heftig geschieht, entsteht ein Wirbelsturm, der je nach Region als *Zyklon*, *Taifun* oder *Hurrikan* bezeichnet wird.

Nochmals zur Klarstellung: Sowohl die Coriolis-, als auch die Zentrifugalkraft sind im Kern kinematische Effekte, die nur deshalb auftreten, weil wir auf der Verwendung eines rotierenden Bezugssystems bestehen. Wie Anwendungsbeispiele zeigen, ist es in einigen einfachen Fällen aber leichter (und genauso instruktiv), die Bewegung in einem Inertialsystem zu untersuchen und dann die Ergebnisse auf ein rotierendes System zu transformieren. Im Normalfall allerdings ist die Transformation zwischen zwei Bezugssystemen so kompliziert, dass es in der Regel doch leichter ist, die ganze Zeit über in einem rotierenden Bezugssystem zu arbeiten und die Coriolis- und die Zentrifugalkraft als *Scheinkräfte* hinzunehmen.

⁵Damit hat die Coriolis-Kraft eine gewisse Vergleichbarkeit oder Verwandtschaft zur Lorentzkraft \vec{F}_L auf ein geladenes Teilchen mit Ladung q in einem Magnetfeld der Flussdichte \vec{B} . Dort gilt nämlich: $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$.

⁶Anders als ein Drehtisch ist die Erde allerdings dreidimensional, und dadurch ist der Coriolis-Effekt real etwas komplizierter als in dieser vereinfachenden Aussage behauptet. Dennoch ist die obige Aussage für Objekte, die sich parallel zur Erdoberfläche bewegen, und für flach fliegende Geschosse gewiss richtig.



9 Freier Fall und Coriolis-Kraft

Betrachten wir nun die Auswirkungen der Coriolis-Kraft auf einen Körper im freien Fall, also auf einen Körper, der im Vakuum nahe einem Punkt \vec{R} auf der Erdoberfläche fällt. Dabei müssen wir korrekterweise Zentrifugalkraft und Coriolis-Kraft berücksichtigen. Die Bewegungsgleichung ist also

$$m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g}_0 + \vec{F}_{\text{Zfug}} + \vec{F}_{\text{Cor}} \quad . \quad (29)$$

Hierin ist $m \vec{g}_0$ die "wahre" *Gewichtskraft* der Erde auf den Körper (gemäss dem *Newton'schen Gravitationsgesetz*). Der Ortsfaktor \vec{g}_0 dieser Massenanziehung zeigt Richtung Erdmittelpunkt. Da wir uns an der Erdoberfläche befinden, schreiben wir für die Zentrifugalkraft

$$\vec{F}_{\text{Zfug}} = m (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \times \vec{\Omega} \quad (30)$$

Kehren wir nun zur Bewegungsgleichung (29) zurück. Da uns vor allem der Einfluss der Coriolis-Kraft auf den freien Fall interessiert, können wir die ersten beiden Terme zu einem neuen Term $m \vec{g}$ zusammenfassen. Dabei ist \vec{g} die beobachtete Fallbeschleunigung für einen Körper, der am Ort \vec{R} aus dem Ruhezustand fallen gelassen wird. Aufgrund der Zentrifugalbeschleunigung ist die korrigierte Fallbeschleunigung \vec{g} z.B. in Zürich punkto Betrag minimal kleiner als g_0 . Ihre Richtung geht immer noch Richtung Erdboden, allerdings mit einer ganz kleinen Abweichung gegen Süden. Wenn wir für \vec{F}_{Cor} dann $2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$ einsetzen und den Faktor m kürzen, erhalten wir:

$$m \ddot{\vec{r}} = m \vec{g} + 2m\vec{v} \times \vec{\Omega} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{\vec{r}} = \vec{g} + 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (31)$$

In dieser Gleichung taucht an keiner Stelle der Ort \vec{r} auf, sondern nur dessen Ableitungen $\dot{\vec{r}}$ und $\ddot{\vec{r}}$. Die Gleichung ändert sich also nicht, wenn man den Ursprung verschiebt (denn eine Verschiebung des Ursprungs bewirkt nur eine zusätzliche additive Konstante zu \vec{r} , die beim Differenzieren herausfällt). Dementsprechend können wir nun unseren Koordinatenursprung auf die Erdoberfläche an den Ort \vec{R} legen. Unser lokales Koordinatensystem soll am Ort \vec{R} auf der Erdoberfläche eine x -Achse nach Osten, eine y -Achse nach Norden und eine z -Achse nach oben – präziser: entgegengesetzt zum Ortsfaktor \vec{g} haben. Der Ortsvektor \vec{r} bezieht sich nun auf dieses Koordinatensystem. Mit dieser Wahl der Achsen lässt sich die Bewegungsgleichung in ihre drei Komponenten zerlegen. Die Komponenten von $\dot{\vec{r}}$, $\vec{\Omega}$ und \vec{g} lauten

$$\dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad (32)$$

und wir erhalten für das Vektorprodukt $\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{y} \Omega \cos \theta - \dot{z} \Omega \sin \theta \\ -\dot{x} \Omega \cos \theta \\ \dot{x} \Omega \sin \theta \end{pmatrix} \quad . \quad (33)$$

Damit lässt sich die Bewegungsgleichung (31) in die folgenden drei Gleichungen zerlegen:

$$\dot{x} = 2\Omega(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) \quad \dot{y} = -2\Omega \dot{x} \cos \theta \quad \dot{z} = -g + \Omega \dot{x} \sin \theta \quad . \quad (34)$$

Wir lösen diese drei Gleichungen durch mehrere aufeinanderfolgende Näherungen, die von der Kleinheit von Ω Gebrauch machen. Zunächst erhalten wir, weil Ω sehr klein ist, eine akzeptable Anfangsnäherung, wenn wir Ω komplett ignorieren. In dieser Näherung reduzieren sich die Gleichungen auf:

$$\dot{x} = 0 \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = -g \quad . \quad (35)$$

Dies sind die Gleichungen für den freien Fall, wie man sie in jedem Einführungskurs zur Physik löst. Wenn man einen ruhenden Körper von einem Punkt mit $x = y = 0$ und $z = h$ fallen lässt, müssen nach den ersten beiden Gleichungen \dot{x} , \dot{y} , x und y , allesamt null bleiben. Aus der letzten Gleichung folgt $\dot{z} = -gt$ und $z = h - \frac{1}{2}gt^2$. Unsere Näherungslösung ist also

$$x = 0 \quad y = 0 \quad z = h - \frac{1}{2}gt^2 \quad (36)$$

d.h., der Körper fällt mit konstanter Beschleunigung g vertikal nach unten. Diese Näherung wird manchmal als Näherung *nullter Ordnung* bezeichnet, weil sie nur die nullte Potenz von Ω berücksichtigt (d.h. von Ω unabhängig ist). Es handelt sich bekanntermaßen um eine sehr gute Näherung, doch sie zeigt keinerlei Auswirkungen der Coriolis-Kraft.

Für die nächste Näherung argumentieren wir folgendermaßen: Die Terme in (34), die Ω enthalten, sind alle klein. Daher können wir ruhig diese Terme mithilfe der Näherung nullter Ordnung für x , y und z berechnen. Setzen wir (36) in die rechte Seite von (34) ein, so erhalten wir

$$\ddot{x} = 2\Omega g t \sin \theta \quad \ddot{y} = 0 \quad \ddot{z} = -g \quad . \quad (37)$$

Die letzten beiden Terme sind genau dieselben wie in der Näherung nullter Ordnung, doch die Gleichung für \ddot{x} ist neu. Man kann sie leicht integrieren und erhält:

$$x = \frac{1}{3}\Omega g t^3 \sin \theta \quad (38)$$

y und z sind dieselben wie in der Näherung nullter Ordnung (36). Dieses Ergebnis wird nun als Näherung *erster Ordnung* bezeichnet (weil sie die erste Potenz von Ω berücksichtigt). Diesen Prozess könnten wir wiederholen und eine Näherung zweiter Ordnung usw. herleiten, doch die Näherung erster Ordnung ist für unsere Zwecke gut genug.

Bemerkenswert an der Lösung (38) ist, dass ein frei fallender Körper nicht schnurgerade nach unten fällt: Die Coriolis-Kraft krümmt die Bahn leicht nach Osten (in die positive x -Richtung). Um eine Ahnung von der Größenordnung dieses Effekts zu bekommen, betrachten wir einen Körper, der einen 100 m tiefen senkrechten Schacht am Äquator hinunterfällt, und berechnen die Ablenkung, die er dann beim Aufprall am Boden erleidet. Die Zeit, die der Körper bis zum Aufprall benötigt, wird durch die letzte Gleichung in (36) zu $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ bestimmt, und (38) gibt die östliche Ablenkung an. Mit $\theta = 90^\circ$ und $g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ergibt sich:

$$x = \frac{1}{3}\Omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \sin \theta \approx \frac{1}{3} 7.3 \cdot 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 100 \text{ m}}{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}\right)^{1.5} \cdot \sin 90^\circ \approx 2.2 \text{ cm}$$

Das ist zwar eine kleine Ablenkung, doch sie ist beobachtbar. Eine kleine Ablenkung nach Osten wurde schon von Newton vorhergesagt und auch von seinem Rivalen Robert Hooke (1635 – 1703) bestätigt, doch ließ sie sich erst nachvollziehbar erklären, als man den Coriolis-Effekt verstanden hatte.

10 Das Foucault'sche Pendel

Als eine augenfällige Anwendung des Coriolis-Effekts betrachten wir nun das **Foucault'sche Pendel**, benannt nach seinem Erfinder, dem französischen Physiker *Jean Bernard Léon Foucault* (1819 – 1869). Ein solches Pendel ist in vielen naturwissenschaftlichen Museen und Hochschulen auf der ganzen Welt zu sehen (z.B. im Hauptturm des Deutschen Museums in München, vgl. Bild rechts).



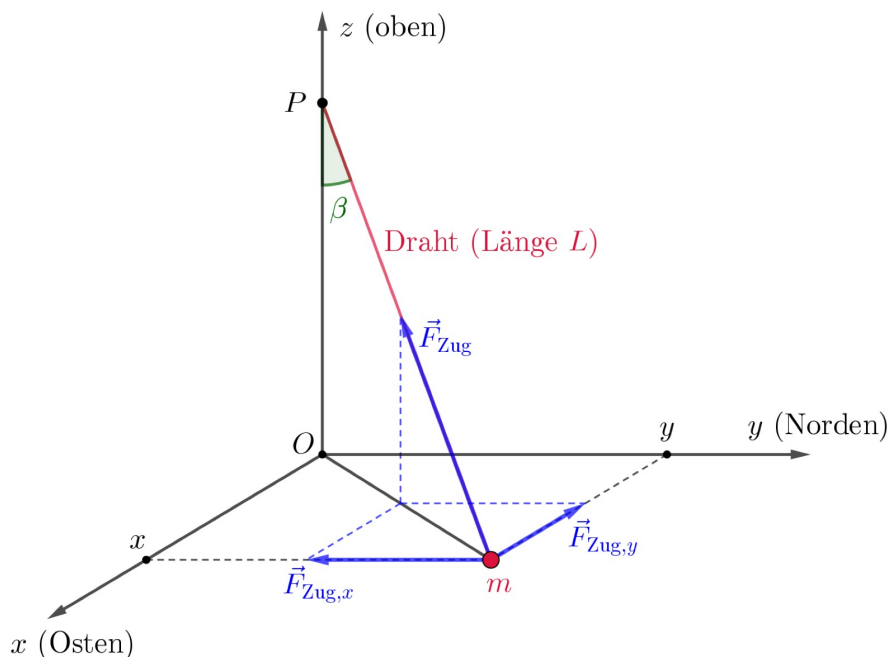
Das Foucault'sche Pendel besteht aus einem sehr schweren Pendelkörper der Masse m , der an einem langen dünnen Draht von einer hohen Decke hängt. In dieser Anordnung schwingt das Pendel eine sehr lange Zeit frei und kann sich sowohl in Ost-West- als auch in Nord-Süd-Richtung bewegen. In einem Inertialsystem betrachtet, wirken nur zwei Kräfte auf den Pendelkörper, nämlich die Zugkraft \vec{F}_{Zug} im Draht und die Gewichtskraft $m\vec{g}$. Im rotierenden, mit der Erde verbundenen Bezugssystem gibt es außerdem noch die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft. Die Bewegungsgleichung im erdfesten Bezugssystem ist

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{Zug}} + m\vec{g}_0 + m(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \times \vec{\Omega} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (39)$$

Genau wie im vorigen Abschnitt lassen sich der zweite und dritte Term auf der rechten Seite zu $m\vec{g}$ zusammenfassen (dabei ist \vec{g} die beobachtete Fallbeschleunigung). Die Bewegungsgleichung wird dann zu

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{\text{Zug}} + m\vec{g} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} \quad (40)$$

Wir können nun unsere Achsen wie im vorigen Abschnitt wählen, also mit der x -Achse in Ostrichtung, der y -Achse in Nordrichtung und der z -Achse vertikal nach oben (Richtung von $-\vec{g}$). Das Pendel sieht dann aus wie folgt aus:



Ich beschränke unsere Diskussion auf den Fall kleiner Auslenkungen, sodass der Winkel β zwischen dem Pendel und der Vertikalen immer sehr klein ist. Daher sind zwei vereinfachende Näherungen zulässig: Erstens wird der Betrag der z -Komponente der Zugkraft \vec{F}_{Zug} gut durch den Betrag der Zugkraft insgesamt genähert, d.h. $F_{\text{Zug},z} = F_{\text{Zug}} \cos \beta \approx F_{\text{Zug}}$. Zweitens ist leicht zu erkennen, dass für kleine Schwingungen gilt: $F_{\text{Zug},z} \approx mg$. 14 Mit diesen beiden Näherungen zusammen ergibt sich

$$F_{\text{Zug}} \approx m \cdot g \quad (41)$$

Nun müssen wir die x - und die y -Komponente der Bewegungsgleichung (40) untersuchen. Dazu müssen wir die x - und die y -Komponente von \vec{F}_{Zug} ermitteln. Beim Blick auf die vorige Abbildung erkennen wir, dass wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke für die Kraftbeträge gilt: $\frac{F_{\text{Zug},x}}{F_{\text{Zug}}} = \frac{x}{L}$. Ebenso gilt: $\frac{F_{\text{Zug},y}}{F_{\text{Zug}}} = \frac{y}{L}$. Kombinieren wir das mit (41) und berücksichtigen wir, dass es sich dabei um rücktreibende Kräfte handelt ($\vec{F}_{\text{Zug},x}$ und $\vec{F}_{\text{Zug},y}$ wirken stets in Richtung O), so folgt:

$$F_{\text{Zug},x} = -\frac{mgx}{L} \quad \text{und} \quad F_{\text{Zug},y} = -\frac{mgy}{L} \quad (42)$$

Die x - und die y -Komponente von \vec{g} sind natürlich null, und die Komponenten von $\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$ sind durch (33) gegeben. Wenn wir dies alles in (40) einsetzen, erhalten wir, nachdem wir den Faktor m gekürzt und einen Term mit \dot{z} entfernt haben (er ist für kleine Schwingungen gegen \dot{x} und \dot{y} vernachlässigbar):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{gx}{L} + 2\dot{y} \Omega \cos \theta \\ \ddot{y} &= -\frac{gy}{L} - 2\dot{x} \Omega \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Hier bezeichnet θ wie üblich die Komplementbreite des Pendelstandorts. Der Faktor $\frac{g}{L}$ ist gerade ω_0^2 , also das Quadrat der Eigenfrequenz ω_0 des Pendels, und $\Omega \cos \theta$ ist gerade Ω_z , also die z -Komponente der Winkelgeschwindigkeit der Erde. Damit lassen sich diese beiden Gleichungen umformen zu

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\Omega_z \dot{y} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega_z \dot{x} + \omega_0^2 y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Wir können die gekoppelten Gleichungen (44) elegant lösen, indem wir eine komplexe Zahl

$$\eta = x + iy \quad (45)$$

definieren und uns ins Gedächtnis rufen, dass diese komplexe Zahl dieselben Informationen enthält wie der Ort in der x - y -Ebene – eine Darstellung von η in der komplexen Ebene ist auch ein Blick von oben auf die Projektion des Pendelorts (x, y) in der x - y -Ebene.

Wenn wir die zweite Gleichung aus (44) mit i multiplizieren und dann zur ersten addieren, erhalten wir eine einzige Differentialgleichung:

$$\ddot{\eta} + 2i\Omega_z \dot{\eta} + \omega_0^2 \eta = 0 \quad (46)$$

Dies ist eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\eta(t)$ und hat daher zwei unabhängige Lösungen. Wenn wir also zwei unabhängige Lösungen finden können, ist die allgemeine Lösung eine Linearkombination dieser beiden. Wie so oft lassen sich zwei unabhängige Lösungen durch "inspiertes Raten" finden: Wir vermuten, dass es für ein bestimmtes konstantes α eine Lösung der Form

$$\eta(t) = e^{i\alpha t} \quad \text{mit} \quad \dot{\eta} = i\alpha e^{i\alpha t} = i\alpha \eta(t) \quad \text{und} \quad \ddot{\eta} = (i\alpha)^2 e^{i\alpha t} = -\alpha^2 \eta(t) \quad (47)$$

gibt. Setzen wir dies in (46) ein, erkennen wir, dass (47) dann und nur dann eine Lösung ist, wenn gilt

$$\alpha^2 - 2\Omega_z \alpha - \omega_0^2 = 0 \quad \text{resp.} \quad \alpha = \Omega_z \pm \sqrt{\Omega_z^2 + \omega_0^2} \approx \Omega_z \pm \omega_0$$

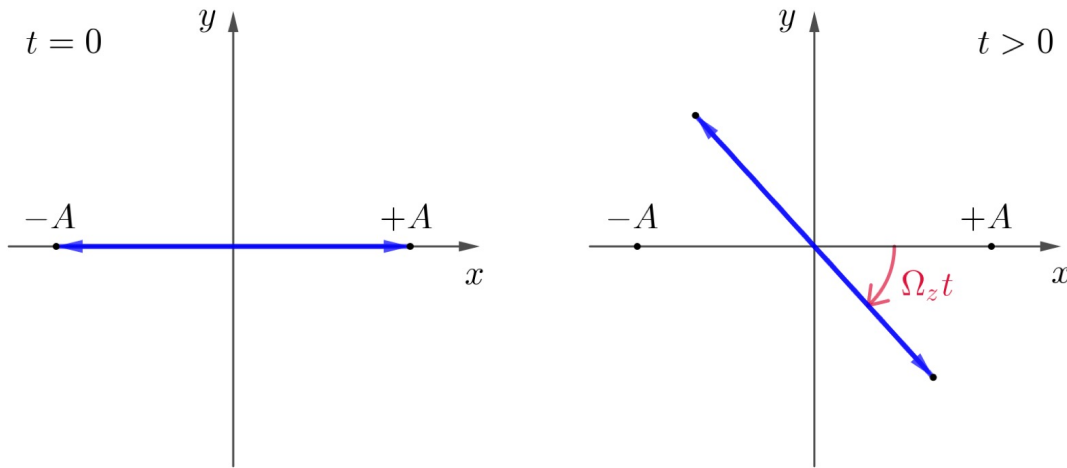
Das letzte Ungefährgleich-Zeichen ist eine extrem gute Näherung, da die Drehgeschwindigkeit Ω der Erde sehr viel kleiner ist als ω_0 des Pendels. Damit haben wir die beiden erforderlichen unabhängigen Lösungen gefunden und als allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung (46) ergibt sich

$$\eta(t) = e^{-i\Omega_z t} (C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}) \quad . \quad (48)$$

Um eine Vorstellung davon zu gewinnen, wie die Lösung aussieht, müssen wir die beiden Konstanten C_1 und C_2 durch Angabe der Anfangsbedingungen festlegen. Nehmen wir an, dass das Pendel zur Zeit $t = 0$ in die x -Richtung (ostwärts) zu einer Position $x = A$ und $y = 0$ ausgelenkt und dann aus dem Stillstand losgelassen wurde ($v_{x,0} = v_{y,0} = 0$). Mit diesen Anfangsbedingungen lässt sich leicht überprüfen, dass $C_1 = C_2 = \frac{A}{2}$ gilt, und unsere Lösung wird zu

$$\eta(t) = A e^{-i\Omega_z t} \cos \omega_0 t \quad . \quad (49)$$

Für $t = 0$ ist der komplexe Exponentialfaktor gleich eins, und es ist $x = A$ und $y = 0$. Wegen $\Omega_z \ll \omega_0$ vollführt der Kosinusfaktor viele Schwingungen, bevor der Exponentialfaktor merklich von eins abweicht. Daraus folgt, dass $x(t)$ anfangs mit der Kreisfrequenz ω_0 zwischen $\pm A$ schwingt, während y dicht bei null bleibt. Mit anderen Worten: Anfangs schwingt das Pendel in harmonischer Schwingung entlang der x -Achse, so wie in folgender Abbildung dargestellt.



Nach einiger Zeit ändert sich der komplexe Exponentialfaktor $e^{-i\Omega_z t}$ jedoch merklich, wodurch die komplexe Zahl $\eta = x + iy$ sich um den Winkel $\Omega_z t$ dreht. Auf der Nordhalbkugel ist Ω_z positiv, d.h. die Zahl $x + iy$ schwingt zwar (wegen des Faktors $\cos \omega_0 t$) sinusförmig, aber zusammen mit einer Rotation im Uhrzeigersinn. Die Schwingungsebene des Pendels rotiert also mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_z langsam im Uhrzeigersinn. Auf der Südhalbkugel, wo Ω_z negativ ist, verläuft die entsprechende Rotation entgegen dem Uhrzeigersinn.

Hängt man ein Foucault'sches Pendel bei der Komplementbreite θ auf (geografische Breite $-\theta$), dann rotiert die Schwingungsebene mit der Geschwindigkeit

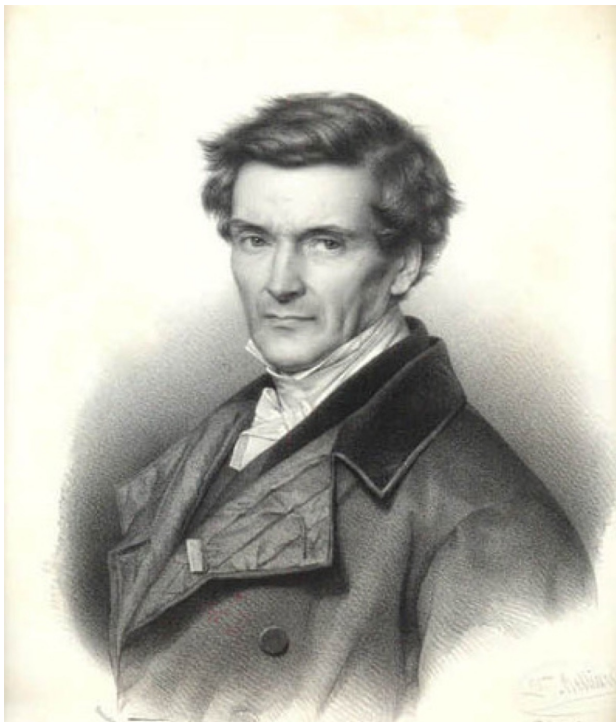
$$\Omega_z = \Omega \cos \theta \quad (50)$$

Am Nordpol ($\theta = 0$) gilt $\Omega_z = \Omega$, die Drehgeschwindigkeit der Pendelebene und die Geschwindigkeit der Erddrehung stimmen also überein. Dieses Ergebnis ist leicht nachzuvollziehen: Wenn man ein am Nordpol aufgehängtes Foucault'sches Pendel in einem Inertialsystem (nicht rotierend) betrachtet, schwingt das Pendel in einer festen Ebene. Im selben Inertialsystem betrachtet, dreht sich jedoch die Erde (von oben betrachtet) mit der Winkelgeschwindigkeit Ω im Gegenuhrzeigersinn. Natürlich muss sich dann, im erdfesten (rotierenden) Bezugssystem betrachtet, die Schwingungsebene des Pendels mit der Winkelgeschwindigkeit Ω im Uhrzeigersinn drehen.

Für jede andere geografische Breite ist das Ergebnis in einem Inertialsystem viel schwieriger zu beschreiben, die Drehgeschwindigkeit der Pendelebene lässt sich jedoch mit (50) leicht berechnen. Am Äquator ($\theta = 90^\circ$) ist $\Omega_z = 0$ und die Pendelebene rotiert nicht. Auf dem 42. Breitengrad (auf der Breite z.B. von Boston, Chicago oder Rom) beträgt die Komplementbreite $\theta = 48^\circ$ und es gilt:

$$\Omega_z = \Omega \cos 48^\circ \approx \frac{2}{3} \Omega \quad (51)$$

Da Ω einer Winkelgeschwindigkeit von 360° pro Tag entspricht, ist $\Omega_z \approx 240^\circ$ pro Tag. Im Lauf von sechs Stunden – ein Zeitraum, den ein langes, gut aufgehängtes Pendel mit Sicherheit ohne nennenswerte Dämpfung schwingen kann – wird sich die Schwingungsebene des Pendels um 60° drehen – ein leicht zu beobachtender Effekt. Die Schwingungsebene des Foucault'schen Pendels im Deutschen Museum dreht sich an einem Tag um etwa 268° , in sechs Stunden also um ca. 67° . (München liegt auf der geografischen Breite 48° ; wir haben also $\Omega_z = \Omega \cos 42^\circ \approx \frac{3}{4} \Omega$.)



Gaspard Gustave de Coriolis (1792 – 1843)



Léon Foucault (1819 – 1868)