Impuls, Aktionsprinzip, Kraftstoss und infinitesimale Veränderungen

Impuls

Der **Impuls** $\vec{p}$ eines Körpers ist ein Mass für seine *"Bewegungsmenge" in eine Richtung*. Umgangssprachlich bezeichnen wir ihn als *Wucht* oder *Schwung*. In der klassischen Mechanik wird der Impuls definiert als das *Produkt aus Masse und Geschwindigkeit*. Er ist eine *gerichtete Grösse*, also ein **Vektor**, mit derselben Richtung wie die Geschwindigkeit $\vec{v}$:

$$\textbf{Impuls:} \qquad \vec{p} := m \cdot \vec{v} \qquad \text{resp.} \qquad \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \cdot v_x \\ m \cdot v_y \\ m \cdot v_z \end{pmatrix} \tag{1}$$

N.B.: $m \cdot \vec{v}$ ist eine *skalare Multiplikation*, weil die Masse m ein *Skalar* ist.

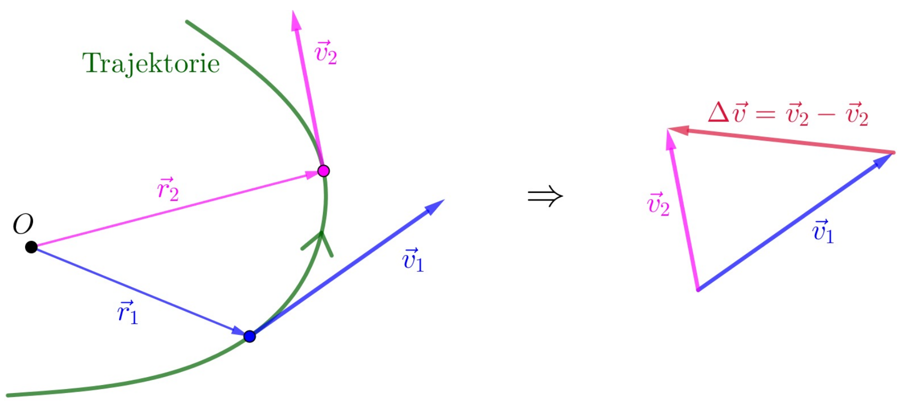
Betrachten wir ausschliesslich *eindimensionale Bewegungen* (längs einer x-Achse), so lassen wir die Vektorpfeile weg und schreiben:

$$p = m \cdot v \tag{2}$$

Ein positiver Impuls steht nun für eine Bewegung in die positive Richtung der Achse, ein negativer Impuls für eine Bewegung entgegengesetzt dazu.

Geschwindigkeits- und Impulsänderung

Ist $\vec{v}_1$ die Geschwindigkeit eines Körpers zu einem Zeitpunkt t_1 und $\vec{v}_2$ seine Geschwindigkeit zu einem späteren Zeitpunkt t_2, so verstehen wir vektorgeometrisch, was mit der **Geschwindigkeitsänderung** $\Delta\vec{v} := \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ von t_1 nach t_2 gemeint ist:



Die Skizze rechts lässt sich nochmals besser verstehen – nämlich als Darstellung einer *Vektoraddition* – wenn wir obige Definition nach $\vec{v}_2$ umstellen:

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \Delta\vec{v} \tag{3}$$

In Worten: "Die neue Geschwindigkeit $\vec{v}_2$ ist die alte Geschwindigkeit $\vec{v}_1$ plus die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$." Klingt sinnvoll!

In gleicher Weise definieren wir auch die **Impulsänderung** $\Delta\vec{p}$ und können sie sofort durch die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ ausdrücken:

$$\Delta\vec{p} := \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m \cdot \vec{v}_2 - m \cdot \vec{v}_2 = m \cdot \big(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\big) = m \cdot \Delta\vec{v} \tag{4}$$

Die Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ zeigt stets in dieselbe Richtung wie die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$.

Mittlere Beschleunigung, Aktionsprinzip und Kraftstoss

Zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 verstreicht die Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$. Die Geschwindigkeitsänderung $\Delta\vec{v}$ pro Zeitspanne Δt definieren wir als die **mittlere Beschleunigung** $\vec{a}_{\mathrm{av}}$ zwischen t_1 und t_2 (av für engl. *average*, also *Durchschnitt*):

$$\vec{a}_{\mathrm{av}} := \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \tag{5}$$

Diese Definition der Beschleunigung kennen wir bereits aus der Mechanik in der ersten Klasse, damals hatten wir sie nur noch nicht vektoriell notiert.

Gemäss dem *Aktionsprinzip* der Newton'schen Mechanik bestimmt die *resultierende Kraft* über Betrag und Richtung der Beschleunigung: Damit während der Zeitspanne Δt eine mittlere Beschleunigung $\vec{a}_{\mathrm{av}}$ auf einen Körper der Masse m wirkt, muss dieser während dieser Zeitspanne eine **mittlere resultierende Kraft** $\vec{F}_{\mathrm{av}}$ erfahren, die gegeben ist durch:

$$\textbf{Aktionsprinzip:} \qquad \vec{F}_{\mathrm{av}} = m \cdot \vec{a}_{\mathrm{av}} \tag{6}$$

N.B.: Der Einfachheit halber erspare ich mir den Index "res" bei der Notation der resultierenden Kraft. Es geht momentan immer um eine resultierende Kraft, wenn wir von einer Kraft sprechen.

Dieses Aktionsprinzip können wir unter Verwendung der Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ neu formulieren:

$$\vec{F}_{\mathrm{av}} = m \cdot \vec{a}_{\mathrm{av}} = m \cdot \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \tag{7}$$

In Worten: *"Der Impuls eines Körpers, also seine Bewegungsmenge, ändert sich genau dann, wenn eine (resultierende) Kraft auf ihn wirkt. Die Kraft ist die Ursache der Impulsänderung."*

Multiplizieren wir obige Gleichung mit Δt, so ergibt sich:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}_{\mathrm{av}} \cdot \Delta t \tag{8}$$

Die rechte Seite, also $\vec{F}_{\mathrm{av}} \cdot \Delta t$, bezeichnen wir als **Kraftstoss**. Über die Zeitspanne Δt hinweg wirkt die mittlere Kraft $\vec{F}_{\mathrm{av}}$ auf den Körper, der deswegen die Impulsänderung $\Delta\vec{p}$ erfährt. Oder kurz: *"Jede Impulsänderung wird durch einen Kraftstoss verursacht."*

Momentane Geschwindigkeit – der Übergang ins Infinitesimale

Natürlich sind die Formulierungen im letzten Absatz noch recht unbefriedigend, weil ständig mit mittleren Angaben – mittlere Beschleunigung, mittlere resultierende Kraft – gearbeitet wird. In der Newton'schen Mechanik interessieren uns momentane Grössen resp. Werte, keine Durchschnittsangaben. Zu jedem Zeitpunkt t möchten wir gerne angeben können, wo der Körper ist ($\rightarrow \vec{r}(t)$), wie er sich gerade bewegt ($\rightarrow \vec{v}(t)$) resp. was sein Impuls ist ($\rightarrow \vec{p}(t)$), was für eine Beschleunigung er gerade erfährt ($\rightarrow \vec{a}(t)$) und durch welche aktuelle Kraft ($\rightarrow \vec{F}(t)$) diese Beschleunigung verursacht wird.

Gehen wir dazu nochmals einen Schritt zurück, sodass wir in den weiteren Überlegungen auch gerade noch die saubere Definition der Momentangeschwindigkeit mit an Bord holen...

Wir wollen zunächst davon ausgehen, dass wir die **Ortsfunktion** $\vec{r}(t)$ bereits kennen, weil wir die Bewegung des Körpers durch unser Koordinatensystem hinreichend genau beobachtet (und ausgemessen) haben. Sind $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ und $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ die Orte des Körpers zu den Zeitpunkten t_1 und t_2, so steht $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ für den Vektor von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$ resp. für die Veränderung des Ortes während der Zeitspanne $\Delta t = t_2 - t_1$. Damit ergibt sich für die **mittlere Geschwindigkeit** $\vec{v}_{\mathrm{av}}$ des Körpers zwischen t_1 und t_2:

$$\vec{v}_{\mathrm{av}} := \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} \tag{9}$$

Das ist noch einmal ein **Differenzenquotient**, der nur eine mittlere Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{av}}$ zu beschreiben vermag. Wie aber lässt sich aus einer komplett bekannten Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ ein Ausdruck für die *Momentangeschwindigkeit* $\vec{v}(t)$ gewinnen?

Das erreichen wir, indem wir den Zeitpunkt t_2 immer näher an t_1 heranschieben. Mathematisch gesprochen bilden wir den *Grenzwert* oder *Limes* für $\Delta t \to 0$. Dadurch entsteht aus Δt neu die unendlich kleine, aber von Null verschiedene (!) Zeitspanne $\mathrm{d}t$, die wir als **infinitesimalen Zeitschritt** bezeichnen.

Nun nennen wir den Zeitpunkt t_1 einfach t und $t_2 = t_1 + \Delta t$ wird zu $t + \mathrm{d}t$. Letzteres ist ein Zeitpunkt, der unendlich kurz auf den Zeitpunkt t folgt. Da $\mathrm{d}t$ unendlich klein wird, gilt das auch für die Veränderung des Ortes während dieses Zeitschrittes. Aus $\Delta\vec{r}$ wird beim Übergang ins Infinitesimale die unendlich kleine Ortsveränderung $\mathrm{d}\vec{r}$.

Was aber passiert mit der durch (9) gegebenen mittleren Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{av}}$, wenn wir Δt infinitesimal werden lassen. Ganz einfach: Jetzt verwandelt sich diese bisherige Durchschnittsgeschwindigkeit zur **Momentangeschwindigkeit** zum Zeitpunkt t, denn wenn zwischen $t_1 = t$ und $t_2 = t + \mathrm{d}t$ nur noch ein unendlich kleiner Zeitunterschied $\mathrm{d}t$ besteht, so wird sich die Geschwindigkeit während dieser infinitesimalen Zeitspanne gar nicht mehr merklich verändern können. Wir definieren also:

(Momentan-)Geschwindigkeit: $$\vec{v}(t) := \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{\mathrm{av}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{10}$$

Diese Definition entspricht genau der mathematischen *Ableitung* der Ortsfunktion $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) := \vec{r}\,'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{11}$$

Und das passt ja bestens, denn die Ableitung einer Grösse nach der Zeit t steht jeweils für die aktuelle **Veränderungsrate** dieser Grösse: Die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ beschreibt, wie schnell und in welche Richtung sich der Aufenthaltsort $\vec{r}(t)$ des Körpers gerade am verändern ist.

Momentane Beschleunigung und momentane resultierende Kraft

Auch aus den anderen mittleren Grössen erhalten wir Definitionen für momentane Grössen:

Mom. Beschleunigung: $$\vec{a}(t) := \vec{v}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{12}$$

Mom. result. Kraft: $$\vec{F}(t) := \vec{p}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{p}(t + \Delta t) - \vec{p}(t)}{\Delta t} \tag{13}$$

- Die Beschleunigung $\vec{a}(t)$ beschreibt, wie schnell und in welche Richtung sich die aktuelle Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ gerade am verändern ist.
- Die resultierende Kraft $\vec{F}(t)$ beschreibt, wie schnell und in welche Richtung sich der aktuelle Impuls $\vec{p}(t)$ gerade am verändern ist.

Die zweite dieser Aussagen ist eigentlich eine Neuformulierung des Aktionsprinzips: Genau dann, wenn eine (resultierende) Kraft auf einen Körper wirkt, ist sich der Impuls am verändern. Falls der Körper Kräftefrei ist ($\vec{F} = 0$), bleibt der Impuls gleich – die "Bewegungsmenge" in eine bestimmte Richtung verändert sich in diesem Fall nicht.

Weiter bemerken wir: Beim Übergang ins Infinitesimale werden aus den **endlichen** stets **infinitesimale Veränderungen** oder **Schritte**. Wir denken also in unendlich kleinen Veränderungen des Ortes ($\to \mathrm{d}\vec{r}$), der Geschwindigkeit ($\to \mathrm{d}\vec{v}$) und des Impulses ($\to \mathrm{d}\vec{p}$). Dabei sind die Richtungen dieser infinitesimalen Veränderungen immer noch durch eine Vektorsubtraktion zu begreifen, denn unter der Richtung von $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ können wir uns auch im infinitesimalen Fall $\mathrm{d}\vec{v}$ immer noch etwas Vernünftiges vorstellen.

Linearität im Infinitesimalen

Kehren wir zurück zum *Kraftstoss* in Gleichung (8). Diese lässt sich nun auch mit infinitesimalen Grössen und mit der momentan wirkenden resultierenden Kraft formulieren:

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}t \tag{14}$$

In Worten: *"Im infinitesimalen Zeitschritt* $\mathrm{d}t$ *bewirkt die Kraft* $\vec{F}$ *eine infinitesimale Veränderung* $\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}t$ *des Impulses."*

Eigentlich ist (14) nichts anderes als die Umstellung der Formulierung der resultierenden Kraft als Ableitung des Impulses in (13). Das darf man offenbar so notieren und obige Formulierung in Worten zeigt auch die Sinnhaftigkeit dieser Gleichung. Tatsächlich lässt sich mit infinitesimalen Grössen in vielen Fällen fast gleich wie mit sonstigen Grössen rechnen. Und es kommt noch hinzu, dass diese infinitesimalen Gleichungen mathematisch besonders einfach sind. Es handelt sich immer um **Proportionalitäten**. Im obigen Fall ist die infinitesimale Veränderung des Impulses $\mathrm{d}\vec{p}$ proportional zum infinitesimalen Zeitschritt $\mathrm{d}t$. Die Proportionalitätskonstante ist die momentane resultierende Kraft $\vec{F}$.

Das bedeutet aber: **Im Infinitesimalen sind alle Abhängigkeiten linear!** Und das ist eine wirklich bemerkenswerte und höchst nützliche Tatsache, wie wir noch oft sehen werden.

Aufgrund dieser Überlegung verstehen wir auch, weshalb sich in der höheren Mathematik für Ableitungen vor allem die sogenannte **Leibniz-Schreibweise** mit infinitesimalen Veränderungen etabliert hat. So schreiben wir z.B. ab sofort häufiger $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ anstelle von $\vec{r}\,'(t)$.

Zusammenfassung – das Wichtigste in Kürze

- Verändert sich eine vektorielle Grösse $\vec{u}$, so begreifen wir via Vektorsubtraktion, was unter der endlichen Veränderung $\Delta\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ zu verstehen ist. Beim Übergang ins Infinitesimale wird daraus die infinitesimale Veränderung $\mathrm{d}\vec{u}$.

- Der Quotient aus einer endlichen Veränderung $\Delta\vec{u}$ pro endlichem Zeitschritt Δt, also $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}$, beschreibt lediglich eine mittlere Veränderungsrate. Erst durch den Übergang ins Infinitesimale, $\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} \to \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$, wird dadurch die momentane Veränderungsrate dieser Grösse. Diese entspricht der Ableitung von $\vec{u}(t)$ nach der Zeit t.

- Auf diese Weise haben wir verstanden, dass...

  - die mom. Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ der Ableitung der Ortsfunktion $\vec{r}(t)$ entspricht:

    $$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \tag{15}$$

  - die mom. Beschleunigung $\vec{a}(t)$ der Ableitung der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ entspricht:

    $$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \tag{16}$$

  - aus dem Aktionsprinzip folgt, dass die momentane resultierende Kraft $\vec{F}(t)$ der zeitlichen Ableitung des Impulses $\vec{p}(t)$ entspricht:

    $$\vec{F}(t) = \vec{p}\,'(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \tag{17}$$

- Aus der Definition des Impulses $\vec{p} := m \cdot \vec{v}$ (Impuls = Mass für die Bewegung einer Masse in eine bestimmte Richtung), ergibt sich ein neues Verständnis für das Aktionsprinzip der Newton'schen Mechanik: Die auf den Körper wirkende (resultierende) Kraft $\vec{F}$ bewirkt eine Veränderung des Impuls $\vec{p}$. Das bedeutet infinitesimal:

  $$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F} \cdot \mathrm{d}t \tag{18}$$