Zweidimensionale Polarkoordinaten

Polarkoordinaten für Ortsvektoren im $\mathbb{R}^2$

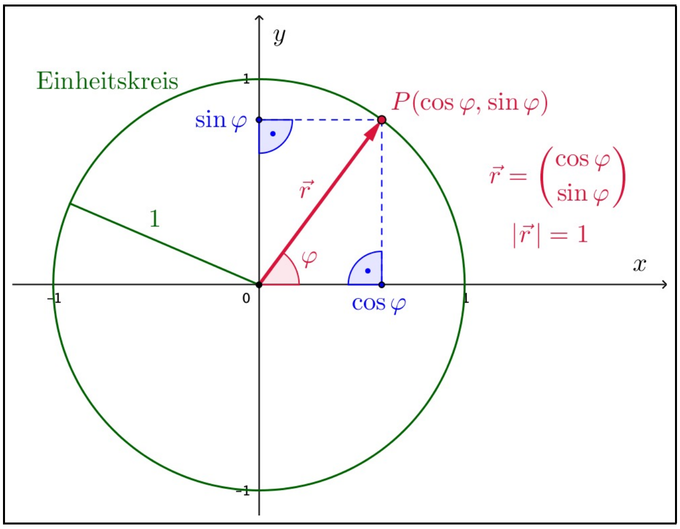
$$\text{bisher (kartesisch):} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{neu (polar):} \quad \vec{r} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \end{pmatrix}$$

- $r =$ **Radius** oder **Radialkoordinate**, $\varphi =$ **Polar**- oder **Azimutwinkel** oder **Winkelkoordinate**.
- Berechnung der kartesischen Koordinaten aus den Polarkoordinaten (ganz einfach!):

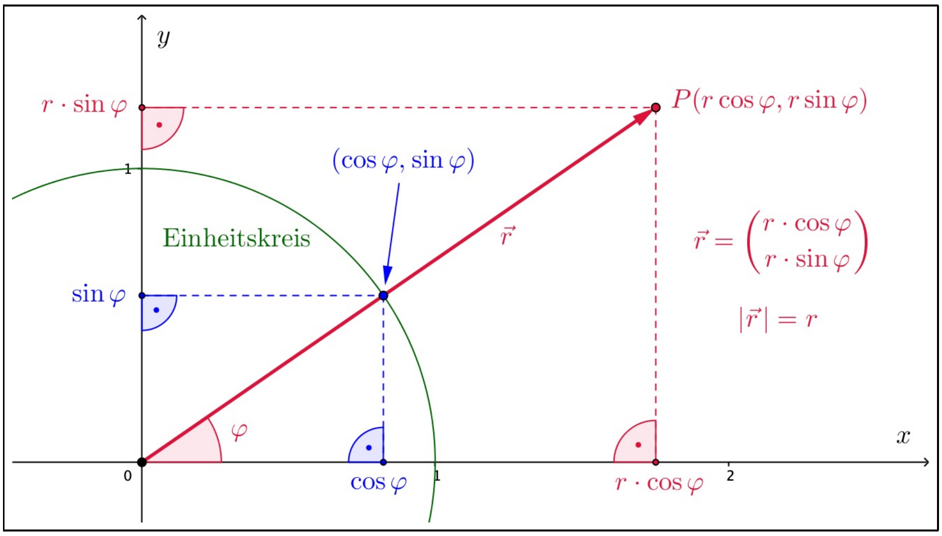
$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad \text{und} \qquad y = r \cdot \sin\varphi$$

- $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sind definiert (!) als x- und y-Koordinaten eines Punktes auf dem **Einheitskreis** des x-y-Koordinatensystems

  $\Rightarrow$ Vektor $\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ führt von $(0, 0)$ zu einem solchen Punkt!
- Winkel-Nullrichtung $\widehat{=}$ positive x-Achse, positive Winkel werden im Gegenuhrzeigersinn abgetragen.



- Skalarer Faktor r streckt $\binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, sodass $\vec{r} = r \cdot \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$ nun den Abstand r vom Ursprung $(0, 0)$ hat:



- Nebenbei: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = \sqrt{r^2} = r$
- Winkel im Gradmass: praktisch für Anschauung, weil wir daran gewohnt sind, aber unpraktisch für weitere Betrachtungen, insbesondere für alle Rechnungen $\Rightarrow$ **Bogenmass!**

Merke: $\quad \pi \,\widehat{=}\, 180°$

Rücktransformation: Kartesische Koordinaten $\to$ Polarkoordinaten

Winkelkoordinate r? Für den Radius r folgt sofort:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Winkelkoordinate φ? Etwas komplizierter!

- **Feststellung:** Zu bestimmtem $\vec{r}$ existieren im Prinzip beliebig viele korrekte Werte für φ!
  Ist φ_0 ein zu $\vec{r}$ gehörender Winkel, dann auch:

  $$\varphi = \varphi_0 + n \cdot 2\pi \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{Z}$$

  Begründung: Eine ganze Runde mehr oder weniger ändert an der Winkelrichtung nichts!
- **Forderung:** Winkelkoordinate soll so nahe wie möglich bei 0 liegen! Wir bevorzugen somit:

  $$-\pi < \varphi \leq \pi$$

- **Umsetzung?** $\vec{r}$ besitzt Komponenten $x = r \cdot \cos\varphi$ und $y = r \cdot \sin\varphi$. Daraus folgt:

  $$\frac{y}{x} = \frac{r \cdot \sin\varphi}{r \cdot \cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

- **Problem:** Für $\binom{3}{2}$ und für $\binom{-3}{-2}$ ergäbe sich so dasselbe φ, weil:

  $$\frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}$$

- **Fallunterscheidung!** Je nachdem, in welchen Quadranten $\vec{r}$ zeigt, muss φ anders berechnet werden! Arcustangens liefert per Definition Winkelwerte $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Daher legen wir fest:

  1. Quadrant: $x > 0$ und $y > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$
  2. Quadrant: $x < 0$ und $y > 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} + \pi$
  3. Quadrant: $x < 0$ und $y < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x} - \pi$
  4. Quadrant: $x > 0$ und $y < 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arctan\frac{y}{x}$

  So entstehen die Winkelwerte mit möglichst kleinem Betrag, also eben $-\pi < \varphi \leq \pi$.