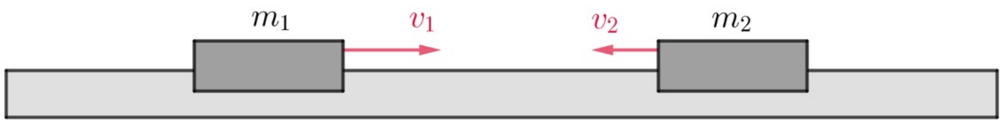
Stösse auf der Luftkissenbahn – Paradebeispiele zur Impulserhaltung

Ausgangslage

Wir betrachten zwei Schlitten 1 und 2 mit Massen m_1 und m_2 auf der Luftkissenbahn. Sie sind aufgrund des Luftkissens reibungsfrei mit ihren Geschwindigkeiten v_1 und v_2 unterwegs, allerdings in irgendeiner Art und Weise auf Kollisionskurs:



Vorzeichen! Geschwindigkeiten nach rechts seien positiv. Würde sich also der Schlitten 2 nach links bewegen – so wie oben gezeichnet – so wäre $v_2 < 0$. Zur Kollision kann es aber ebenso gut kommen, wenn beide Geschwindigkeiten positiv wären und $v_1 > v_2$ ist. Alle Möglichkeiten sollen berücksichtigt werden und daher ist es gut, wenn wir uns vorab über die Bedeutung von Vorzeichen im Klaren sind.

Gegebenes und Gesuchtes → Fragestellung

Wir wollen davon ausgehen, dass sowohl die Massen m_1 und m_2 der beiden Schlitten, wie auch ihre Geschwindigkeiten v_1 und v_2 vor dem Stoss bekannt sind.

Gesucht werden die Geschwindigkeiten v_1' und v_2' nach der Kollision. Diese Geschwindigkeiten sollten sich aufgrund unserer mechanischen Gesetze voraussagen lassen!

Vollständig inelastischer Stoss

Von einem *vollständig inelastischen Stoss* sprechen wir, wenn maximal viel kinetische Energie vernichtet wird, also in andere Energieformen (Wärme, Deformation) übergeht. Dies ist – ohne das jetzt näher zu beweisen – genau dann der Fall, wenn sich die beiden Schlitten bei der Kollision ineinander verkeilen resp. aneinander kleben bleiben. Dann weisen sie nach dem Zusammenstoss dieselbe Geschwindigkeit

$$v' = v_1' = v_2'$$

auf. Da bei diesem vollständig inelastischen Prozess eben eine nicht ganz klar definierte Menge an kinetischer Energie verloren geht, können wir hier nicht mit dem Erhaltungsprinzip arbeiten. Es bleibt uns nur der Impulserhaltungssatz übrig – damit funktioniert die Berechnung aber bestens. Schliesslich haben wir nur noch eine Unbekannte v' und benötigen daher auch nur noch eine einzige Gleichung:

Impulserhaltung (IE):

$$\begin{array}{rrcll}
 & P' & = & P & \mid P = \sum p \\
\Rightarrow & p_1' + p_2' & = & p_1 + p_2 & \mid p = mv \\
\Rightarrow & m_1 v_1' + m_2 v_2' & = & m_1 v_1 + m_2 v_2 & \mid v_1' = v_2' = v' \\
\Rightarrow & m_1 v' + m_2 v' & = & m_1 v_1 + m_2 v_2 & \mid v' \text{ ausklammern} \\
\Leftrightarrow & (m_1 + m_2) v' & = & m_1 v_1 + m_2 v_2 & \mid :(m_1 + m_2) \\
\Leftrightarrow & v' & = & \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} & \mid :(m_1 + m_2)
\end{array}$$

Damit sehen wir, was beim inelastischen Stoss passiert: Der Gesamtimpuls $P = m_1 v_1 + m_2 v_2$ verteilt sich nach dem Stoss auf die Gesamtmasse $m_1 + m_2$, was die neue Geschwindigkeit v' festlegt.

Nachdem man ein allgemeines Resultat erhalten hat, lohnt es sich in aller Regel zur Überprüfung den einen oder anderen **Spezialfall** zu betrachten. Hier ein paar Beispiele:

Gleiche Massen: Ist $m = m_1 = m_2$, so ergibt sich die Lösung $v' = \frac{mv_1+mv_2}{2m} = \frac{v_1+v_2}{2}$. Das bedeutet, bei gleichen Massen ist die Endgeschwindigkeit einfach die Durchschnittsgeschwindigkeit der beiden Anfangsgeschwindigkeiten. Das klingt plausibel!

Genau entgegengesetzte Anfangsgeschwindigkeiten: Ist $v_1 = v = -v_2$, so lautet die Gleichung für die Endgeschwindigkeit $v' = \frac{m_1 v - m_2 v}{m_1+m_2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \cdot v$. Wir sehen, dass nun der Vergleich der beiden Massen bestimmt, in welche Richtung sich die Schlitten nach dem Stoss bewegen. Ist $m_1 > m_2$, so wird $m_1 - m_2$ positiv und die Schlitten bewegen sich in die Richtung, in die sich m_1 vor dem Stoss bewegt hat. In die andere Richtung geht's, wenn $m_2 > m_1$ ist. Sind beide Massen gleich gross, so bleiben die Schlitten nach dem Stoss stehen!

Hier wird klar, weshalb wir beispielsweise bei einem Frontalcrash zweier Fahrzeuge lieber im Fahrzeug mit der grösseren Masse sitzen. Dessen Geschwindigkeit verändert sich beim Crash weniger, was bedeutet, dass die Insassen geringere Beschleunigungen resp. Kräfte erfahren und somit in aller Regel weniger verletzt werden.

Aufprall auf ein ruhendes Objekt: Ruht Schlitten 2 vor dem Zusammenprall ($v_2 = 0$), so erhalten wir $v' = \frac{m_1 v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \cdot v$. Der Impuls von Schlitten 1 muss beim Zusammenprall neu auf die beiden Massen m_1 und m_2 verteilt werden. Die Geschwindigkeit wird verkleinert. Sind in diesem Fall beide Massen genau gleich gross, $m_1 = m_2 = m$, so wird die Geschwindigkeit von Schlitten 1 genau halbiert, denn $v' = \frac{mv_1}{m+m} = \frac{v_1}{2}$.

Vollständig elastischer Stoss

Beim *vollständig elastischen Stoss* bleibt die totale kinetische Energie der beiden Schlitten erhalten. Somit haben wir mit Energie- und Impulserhaltung nun zwei Gleichungen, aber mit v_1' und v_2' eben auch zwei Unbekannte. Betrachten wir das sich allgemein ergebende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{l} \textbf{Impulserhaltung (IE):} \\ \textbf{Energieerhaltung (EE):} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \end{array} \right| \quad \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array}$$

Ich notiere hier die ersten paar Lösungsschritte – einfach damit wir nicht so viel von Hand zu schreiben haben – bevor wir dann im Heft weiterfahren:

aus ①: $$v_1' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_2 v_2'}{m_1} = v_1 + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')$$

in ②: $$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1}{2}\left(v_1 + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')\right)^2 + \frac{m_2 v_2'^2}{2} \qquad \Big| \cdot \frac{2}{m_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2^2 = \left(v_1 + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')\right)^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \qquad \Big| \text{ausmultiplizieren}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_1^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2^2 = v_1^2 + 2v_1 \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2') + \frac{m_2^2}{m_1^2}(v_2 - v_2')^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \qquad \Big| - v_1^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} v_2^2 = 2v_1 \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2') + \frac{m_2^2}{m_1^2}(v_2 - v_2')^2 + \frac{m_2}{m_1} v_2'^2 \qquad \Big| \cdot \frac{m_1}{m_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_2^2 = 2v_1 (v_2 - v_2') + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')^2 + v_2'^2$$

Wir bemerken, dass es sich hier um eine quadratische Gleichung in v_2' handelt. Wir könnten versucht sein, sie in die Normalform $ax^2 + bx + c = 0$ zu bringen, um anschliessend die Mitternachtsformel anzuwenden. Das wäre allerdings ziemlich mühsam, denn das Ausmultiplizieren und v.a. das nachfolgende Sortieren nach quadratischen, linearen und konstanten Gliedern gibt richtig viel zu tun. Viel besser ist es, eine Lösung zu erahnen...