VEKTORGEOMETRIE

ein Mathematik-Skript für die Klasse 150c

Alex Gertsch

Zürich im Januar 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Vektoren im $\mathbb{R}^3$

1.1 Koordinatensystem und Punkte im Raum

Zur Angabe eines **Ortes** resp. **Punktes** im **dreidimensionalen Raum** $\mathbb{R}^3$ richten wir ein **(kartesisches) Koordinatensystem** ein:

i. Einen bestimmten Ort[1] legen wir als **Ursprung** (auch **Nullpunkt** oder **Origo**) O fest.

ii. In diesen Ursprung legen wir die Nullpunkte dreier senkrecht zueinander stehender **Koordinatenachsen**, die wir als $\boldsymbol{x}-$, $\boldsymbol{y}$ und $\boldsymbol{z}$**-Achse** bezeichnen. Jede Achse ist ein **reeller Zahlenstrahl**, auf dem alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ vorhanden sind.

iii. Zu jedem Punkt im Raum gehört ein eindeutiges reelles **Zahlentripel** $P(x_P, y_P, z_P) \in \mathbb{R}^3$ (vgl. Abb. 1.1). Wir sagen: Jeder Punkt im dreidimensionalen Raum hat drei reelle **Koordinaten**. Daher auch die Kurzschreibweise $\mathbb{R}^3$ für den dreidimensionalen Raum.

   Vom Ursprung gelange ich zum Punkt P, indem ich auf der x-Achse bis zur Stelle x_P gehe, dann senkrecht dazu in Richtung der y-Achse y_P weit gehe und schliesslich nochmals senkrecht dazu in Richtung der z-Achse die Distanz z_P zurücklege.

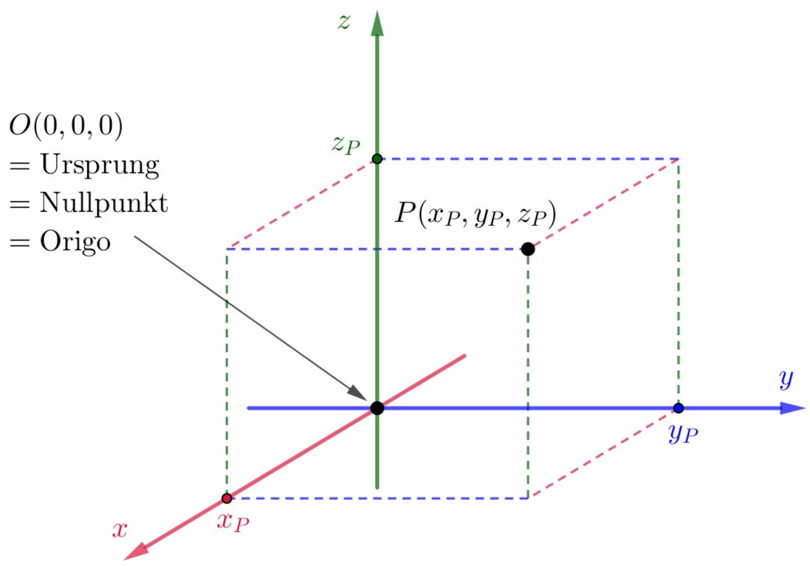


Abbildung 1.1: Ein dreidimensionales Koordinatensystem. Punkte sind Koordinatentripel.

[1] In physikalischen Anwendungen entspricht der Ursprung typischerweise dem Aufenthaltsort eines Bezugsobjektes.

1.2 Vektoren als Pfeile bzw. Verschiebungen im $\mathbb{R}^3$

Sobald ich mir zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ vorgebe, kann ich fragen, wie ich vom einen zum anderen Punkt gelange.

Die Antwort ist ein Pfeil von P nach Q, durch den eine **Verschiebung** von P nach Q beschrieben wird. Diese Verschiebung bezeichnen wir als **Vektor** $\overrightarrow{PQ}$. Dabei zeigt das **"Vektorpfeilchen"** über den beiden Buchstaben an, dass es sich um eine Pfeilverbindung von P nach Q handeln soll. Im Fachjargon bezeichnet man Verschiebungen auch als **Translationen**.

Vektorkomponenten

Die durch den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ beschriebene Verschiebung von P nach Q können wir in drei hintereinander ausgeführte Teilverschiebungen längs der Koordinatenachsen zerlegen.

Beispiel: Seien $P(-1, 3, 0)$ und $Q(3, 1, 3)$. In Abb. 1.2 sehen wir die Lage dieser beiden Punkte im Koordinatensystem und den Vektorpfeil $\overrightarrow{PQ}$, der vom Punkt P zum Punkt Q zeigt.

Um von P nach Q zu gelangen, muss ich folglich $+4$ Einheitsschritte in x-Richtung, -2 Einheitsschritte in y-Richtung und $+3$ Einheitsschritte in z-Richtung gehen.

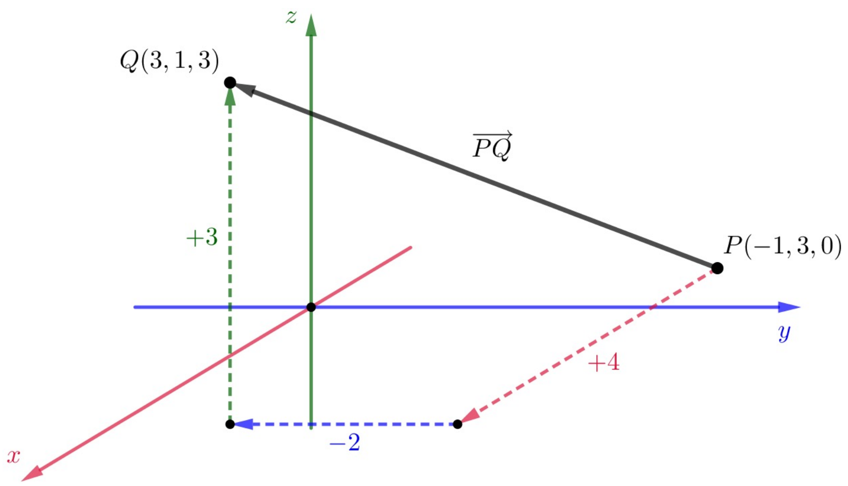


Abbildung 1.2: Ein Vektor im $\mathbb{R}^3$ ist ein Pfeil, der als eine Verschiebung zwischen zwei Punkten verstanden werden kann. Der Vektor von P nach Q lässt sich in drei Komponenten parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen.

Die Teilverschiebungen längs der Koordinatenachsen nennt man die **Komponenten** des Vektors $\overrightarrow{PQ}$. Dies führt uns auch direkt zur **Komponentenschreibweise** für Vektoren:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In dieser Komponentenschreibweise notieren wir allgemein für einen beliebigen Vektor $\vec{v}$:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Dabei sind v_x, v_y und v_z die **Vektorkomponenten** oder einfach die **Komponenten** von $\vec{v}$.

Gleiche Pfeile als Repräsentanten ein- und desselben Vektors

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ steht für die Verschiebung vom Punkt P zum Punkt Q, dargestellt durch einen Pfeil von P nach Q. Ein Pfeil mit gleicher Länge und gleicher Richtung kann sich aber auch zwischen zwei anderen Punkten R und S ergeben, wie dies in Abb. 1.3 gezeigt wird. Wir sagen: Die Pfeile $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ sind **Repräsentanten** ein- und desselben Vektors. Die Verschiebung von P nach Q entspricht derjenigen von R nach S. Es handelt sich um den gleichen Vektor:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

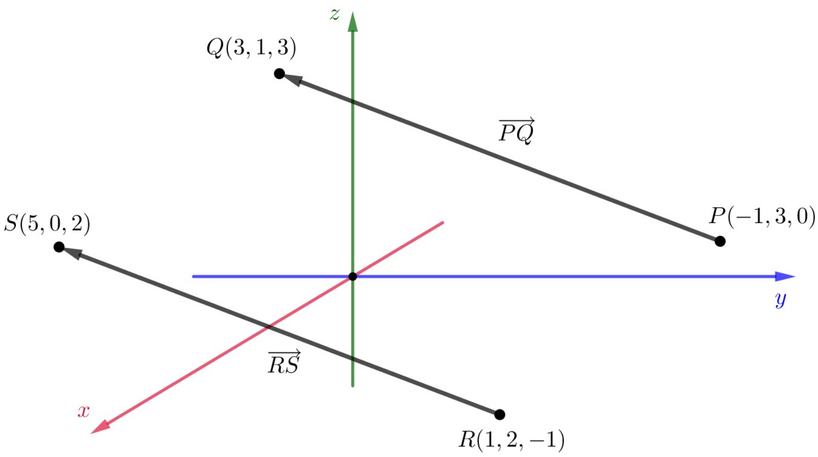


Abbildung 1.3: Zwei Repräsentanten (Pfeile) zum selben Vektor.

Somit ist es auch sinnvoll zu sagen, dass beispielsweise eine Figur oder ein Körper um einen bestimmten Vektor $\vec{v}$ verschoben wird. Das bedeutet einfach, dass jeder Punkt der Figur resp. des Körpers mit demselben Pfeil (Richtung und Länge identisch) verschoben wird (vgl. Abb. 1.4).

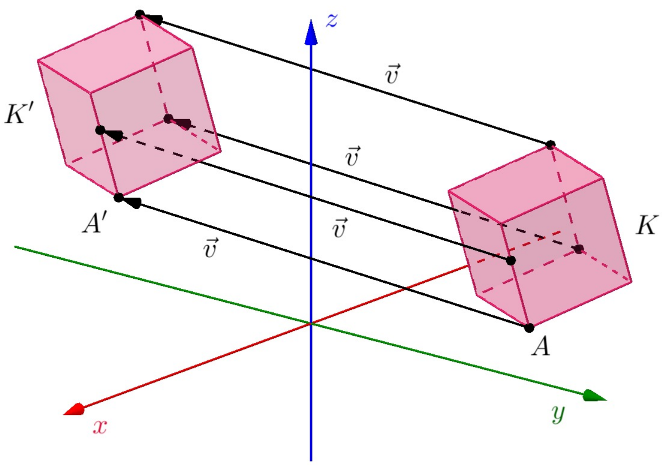


Abbildung 1.4: Die Verschiebung des Körpers K um den Vektor $\vec{v}$. Alle Punkte von K werden separat um den Vektor $\vec{v}$ verschoben.

1.3 Ortsvektoren

Mit dem Ursprung O legen wir im Raum einen ganz bestimmten Punkt als Ausgangspunkt für unser Koordinatensystem fest. Alle weiteren Punkte lassen sich dann erreichen, indem ich sage, wie weit ich von O aus in x-, in y- und in z-Richtung zu gehen habe (vgl. Abschnitt 1.1).

Folglich wird jeder Punkt P durch einen Vektor $\overrightarrow{OP}$ beschrieben, der mir sagt, wie ich vom Ursprung O zum Punkt P gelange. Derartige Vektoren nennen wir **Ortsvektoren**. Der Einfachheit halber schreiben wir dafür nur $\vec{P}$ anstelle von $\overrightarrow{OP}$.

Die Punktkoordinaten entsprechen den Komponenten des zugehörigen Ortsvektors. So gilt beispielsweise für die beiden Punkte P und Q resp. für deren Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ (vgl. Abb. 1.5):

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{Q} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ von P nach Q durch eine Subtraktion von Ortsvektoren ausdrücken:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} x_Q \\ y_Q \\ z_Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 1-3 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bem.: Beim Schritt $(*)$ sind wir davon ausgegangen, dass die Subtraktion zweier Vektoren **komponentenweise** erfolgt, dass also die x-, die y- und die z-Komponenten einzeln voneinander subtrahiert werden. Das ist tatsächlich sinnvoll so, wie wir im Kapitel 2 noch genauer sehen werden. Bereits jetzt wollen wir uns merken:

Vektor zwischen zwei Punkten

Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ vom Punkt P zum Punkt Q ist die Differenz zwischen dem Ortsvektor $\vec{Q}$ des Endpunktes und dem Ortsvektor $\vec{P}$ des Anfangspunktes:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \\ z_Q - z_P \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Dabei erfolgt die Subtraktion der beiden Vektoren komponentenweise.

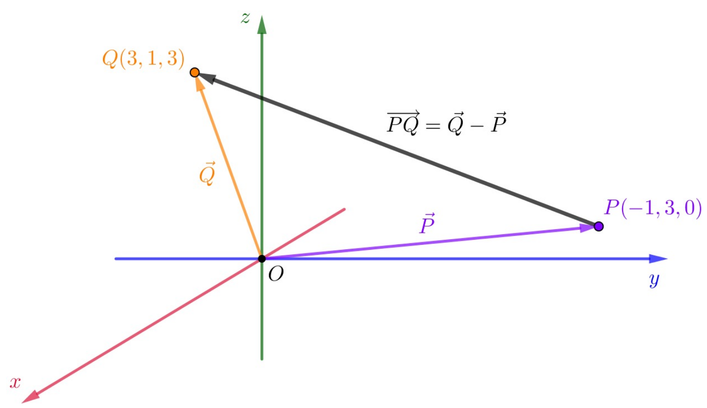


Abbildung 1.5: Die Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ führen vom Ursprung O zum jeweiligen Punkt. Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Differenz der beiden Ortsvektoren.

1.4 Der Betrag $|\vec{v}\,|$ eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{v}$ ist einfach eine Zahl. Wir bezeichnen sie als den **Betrag** $|\vec{v}\,|$ des Vektors. In der Regel vereinfachen wir uns diese Betragsnotation, indem wir statt $|\vec{v}\,|$ einfach v schreiben. Bei Vektoren zwischen zwei Punkten, also z.B. bei $\overrightarrow{PQ}$, schreiben wir für den Betrag aber eher $\overline{PQ}$.

Im $\mathbb{R}^3$ ergibt sich der Betrag eines Vektors $\vec{v}$ durch eine doppelte Anwendung des **Satzes von Pythagoras**, wie wir uns sofort am bekannten Beispiel $\overrightarrow{PQ}$ veranschaulichen wollen.

Beispiel: Abb. 1.6 zeigt wieder den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$. Seine Länge entspricht der Länge der Raumdiagonale eines Quaders mit gegenüberliegenden Eckpunkten P und Q und Quaderkanten parallel zu den Achsen des Koordinatensystems.

Für die Länge der Diagonale d der liegenden Seitenfläche erhalten wir:

$$d^2 = v_x^2 + v_y^2 = 4^2 + (-2)^2 = 20$$

Daraus ergibt sich für die Länge der Raumdiagonale resp. für den Betrag des Vektors $\overrightarrow{PQ}$:

$$\overline{PQ}^2 = d^2 + v_z^2 = \underbrace{v_x^2 + v_y^2}_{=d^2} + v_z^2 = 4^2 + (-2)^2 + 3^2 = 20 + 9 = 29 \quad \Rightarrow \quad \overline{PQ} = \sqrt{29}$$

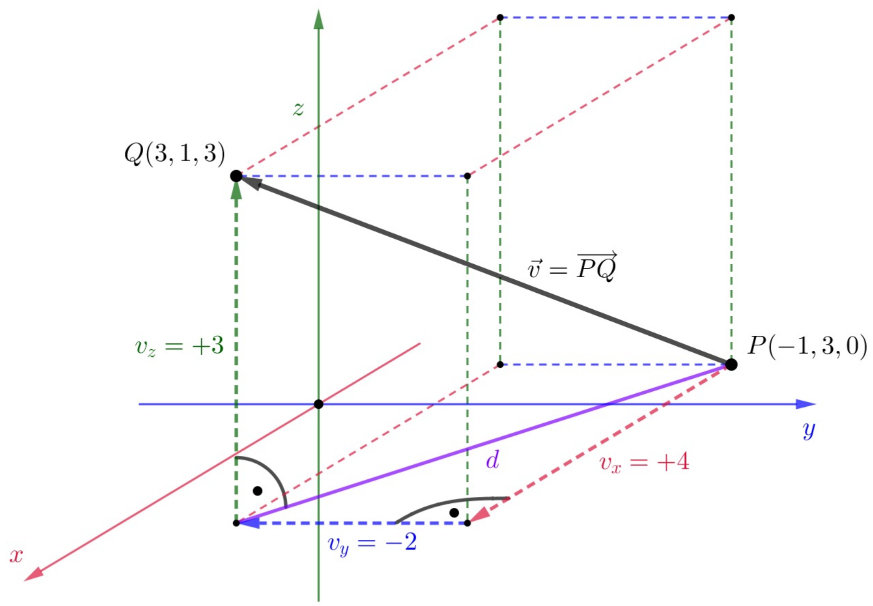


Abbildung 1.6: Die Berechnung des Vektorbetrags erfolgt durch eine doppelte Anwendung Satzes von Pythagoras. Die Diagonale der Seitenfläche des

Wir halten allgemein fest:

> **Berechnung eines Vektorbetrages**
>
> *Der* **Betrag** $|\vec{v}\,|$ *resp.* v *eines Vektors* $\vec{v}$ *ist gegeben durch die Wurzel aus der Summe über die Quadrate der Vektorkomponenten:*
>
> $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad v = |\vec{v}\,| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \tag{1.3}$$

Kapitel 2

Elementare Vektoroperationen

2.1 Vektoraddition

Unter der **Addition zweier Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wollen wir die Verschiebung verstehen, die sich ergibt, wenn wir die zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ gehörenden Verschiebungen hintereinander ausführen.

In Abb. 2.1 sehen wir das Resultat einer solchen **Vektoraddition**. Sie ist offensichtlich **kommutativ**, denn die Reihenfolge der beiden Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spielt für den resultierenden Verschiebungsvektor $\vec{a}+\vec{b}$ keine Rolle:

$$\textbf{Kommutativität der Vektoraddition:} \qquad \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \tag{2.1}$$

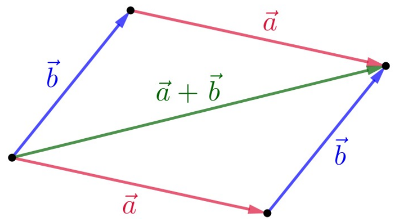


Abbildung 2.1: Das grafische Verständnis für die **Vektorsumme** $\vec{a}+\vec{b}$.

Vektoren zu addieren bedeutet also die zu den einzelnen Vektoren gehörenden Pfeile aneinanderzuhängen. Das gilt für die Summe beliebig vieler Vektoren (vgl. Abb. 2.2).

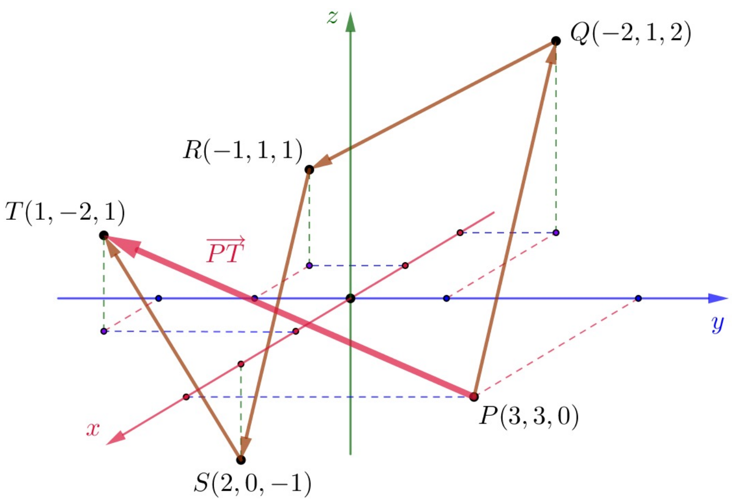


Abbildung 2.2: Der Vektor $\overrightarrow{PT}$ ist die Summe aus den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ und $\overrightarrow{ST}$.

Die Vektoraddition erfolgt komponentenweise!

Die x-Komponente a_x eines Vektors $\vec{a}$ sagt uns, um wie viel sich die x-Koordinate bei der durch $\vec{a}$ beschriebenen Verschiebung verändert. Führen wir die beiden Verschiebungen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ hintereinander aus, addieren wir also die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so wird die x-Koordinate zuerst um a_x, danach um b_x geändert. Insgesamt beträgt die Veränderung somit $a_x + b_x$. Analoge Überlegungen können wir auch für die y- und die z-Komponente anstellen.

Wir bemerken also ganz explizit und allgemein:

Ausführung der Vektoraddition

Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise! D.h., die x-, die y- und die z-Komponenten werden getrennt voneinander addiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

2.2 Skalare Multiplikation

Ein Vektor $\vec{a}$ im $\mathbb{R}^3$ ist ein Objekt bestehend aus drei Komponenten, also aus drei reellen Zahlen. Im Gegensatz dazu bezeichnen wir ein Objekt, zu dessen vollständiger Angabe nur eine einzelne reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ notwendig ist, als **Skalar**.

Nun kann ich ja zum Beispiel sagen, dass ich die durch den Vektor $\vec{a}$ beschriebene Verschiebung gerne sechsmal ausführen möchte. Dabei ist die Zahl $k = 6$ ein Skalar, der zählt, wie oft, also wie viel mal hintereinander die Verschiebung durch den Vektor $\vec{a}$ erfolgen soll. Ich beschreibe hier also die Multiplikation des Vektors $\vec{a}$ mit dem Skalar $k = 6$, denn eine solche Multiplikation mit einem Skalar steht eben stets für die Angabe, wie oft ein bestimmtes Objekt aufaddiert werden soll.

Damit ist aber bereits klar, wie diese sogenannte **skalare Multiplikation** bei Vektoren zu funktionieren hat, denn über die Addition wissen wir ja Bescheid:

$$6 \cdot \vec{a} = \underbrace{\vec{a} + \ldots + \vec{a}}_{\text{6-mal}} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \ldots + \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}}_{\text{6-mal}} = \begin{pmatrix} 6 \cdot a_x \\ 6 \cdot a_y \\ 6 \cdot a_z \end{pmatrix}$$

Halten wir das allgemein fest:

Ausführung der skalaren Multiplikation

Bei der Multiplikation eines Vektors $\vec{a}$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$ muss jede Vektorkomponente einzeln mit dem Skalar k multipliziert werden:

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Offensichtlich kann die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar auf die Multiplikation von zwei reellen Zahlen innerhalb der Komponenten zurückgeführt werden. Daraus folgt, dass für den Skalar k beliebige reelle Werte eingesetzt werden dürfen, denn wir wissen, dass die Multiplikation damit problemlos funktioniert.

Liegt ein Vektor $\vec{a}$ parallel zu einer bestimmten Gerade, so gilt das auch für das Resultat $k \cdot \vec{a}$ der skalaren Multiplikation. Das verstehen wir gut, denn die Komponenten werden alle mit demselben Faktor k multipliziert. D.h., ihr Verhältnis, das für die Ausrichtung entscheidend ist, wird dadurch nicht verändert: $a_x : a_y : a_z = (ka_x) : (ka_y) : (ka_z)$. Für $k < 0$ wechselt der Vektor allerdings seine Zeigerichtung um $180°$.

Abb. zeigt einen Vektor $\vec{a}$ und das Resultat einiger Multiplikationen mit verschiedenen $k \in \mathbb{R}$.

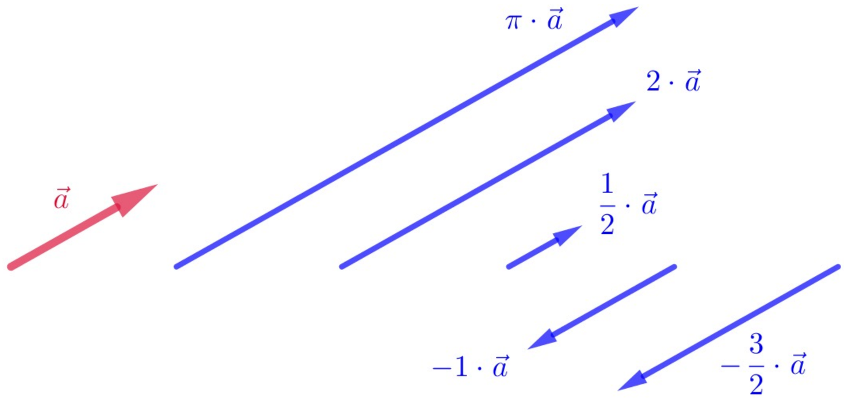


Abbildung 2.3: Bei der skalaren Multiplikation von $\vec{a}$ entsteht ein zu $\vec{a}$ paralleler Vektor. Bei der Multiplikation mit einer negativen Zahl dreht sich allerdings die Zeigerichtung um $180°$.

2.3 Einheitsvektoren

Oftmals ist es praktisch eine Richtung durch einen Vektor mit Länge 1 anzugeben. Solche Vektoren mit Länge 1 nennen wir **Einheitsvektoren**.

Ist ein Vektor $\vec{v}$ gegeben, so bezeichnet $\vec{e}_v$ den Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}$. Ich erhalte $\vec{e}_v$, indem ich den Vektor $\vec{v}$ durch seinen Betrag $v = |\vec{v}\,|$ dividiere resp. mit dem Kehrwert des Betrages multipliziere ($\frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v}$):

Einheitsvektor in Richtung von $\vec{v}$: $$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}\,|} = \frac{\vec{v}}{v} \tag{2.4}$$

2.4 Die Differenz zweier Vektoren

Das Konzept des Nullvektors

Als **Nullvektor** $\vec{O}$ bezeichnen wir die Verschiebung "um nichts". Die Komponenten des Nullvektors sind alle gleich 0, sodass diesem Vektor keine echte Richtung zugeordnet werden kann. Den Nullvektor kann ich zu jedem beliebigen Vektor hinzuaddieren, ohne dass sich an diesem etwas verändert:

Definition des Nullvektors $\vec{O}$: $$\vec{a} + \vec{O} = \vec{a} \tag{2.5}$$

$\vec{O}$ ist aufgrund dieser Eigenschaft das **Nullelement** in der Menge aller Vektoren.

Tatsächlich benutzen wir den Nullvektor eher selten. Er ist aber dennoch ein wichtiges und hilfreiches Element in der Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^3$, z.B. gerade bei der nächsten Überlegung...

Der Gegenvektor eines Vektors

Als **Gegenvektor** zu einem gegebenen Vektor $\vec{a}$ definieren wir denjenigen Vektor $\vec{g}_a$, für den gilt:

$$\vec{a} + \vec{g}_a = \vec{O}$$

D.h., der Gegenvektor $\vec{g}_a$ macht die Verschiebung durch $\vec{a}$ genau rückgängig. Die Hintereinanderausführung ($=$ Summe) von $\vec{a}$ und $\vec{g}_a$ soll insgesamt also den Nullvektor ergeben.

Nun wissen wir ja ganz konkret, wie Vektoren addiert werden, nämlich komponentenweise! Das erlaubt uns sofort die Komponenten von $\vec{g}_a$ zu identifizieren:

$$\vec{a} + \vec{g}_a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_{a,x} \\ g_{a,y} \\ g_{a,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + g_{a,x} \\ a_y + g_{a,y} \\ a_z + g_{a,z} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{g}_a = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} = -\vec{a}$$

Zuletzt haben wir verwendet, dass der Faktor (-1), der in jeder Komponente auftritt, vor den Vektor gezogen werden kann (skalare Multiplikation).

Der Gegenvektor zum Vektor $\vec{a}$ ist also einfach das **Negative** des Vektors $\vec{a}$. D.h., der Gegenvektor $\vec{g}_a$ ist gleich lang wie der Vektor $\vec{a}$, zeigt aber genau in die Gegenrichtung.

Zur Differenz zweier Vektoren

Frage: *Was soll man unter der Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ verstehen?*

Antwort 1: Ist $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ das Resultat der Vektorsubtraktion, so folgt durch Addition von $\vec{b}$ auf beiden Gleichungsseiten:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

Das Resultat der Subtraktion muss also derjenige Vektor $\vec{c}$ sein, der zusammen mit dem Vektor $\vec{b}$ den Vektor $\vec{a}$ ergibt. Die linke Darstellung in Abb. 2.4 verdeutlicht diese Aussage.

Wir erkennen: Die Differenz zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Vektor, der von der Pfeilspitze von $\vec{b}$ zur Pfeilspitze von $\vec{a}$ führt, wenn ich die Pfeile für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ vom gleichen Punkt aus starten lasse.

Antwort 2: Die Subtraktion von $\vec{b}$ kann als Addition des Gegenvektors von $\vec{b}$ verstanden werden:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

Die Addition von Vektoren bedeutet das Aneinanderhängen der Vektorpfeile. $\vec{a} - \vec{b}$ ergibt sich also, indem ich $-\vec{b}$ an $\vec{a}$ hänge (vgl. Abb. 2.4 rechts).

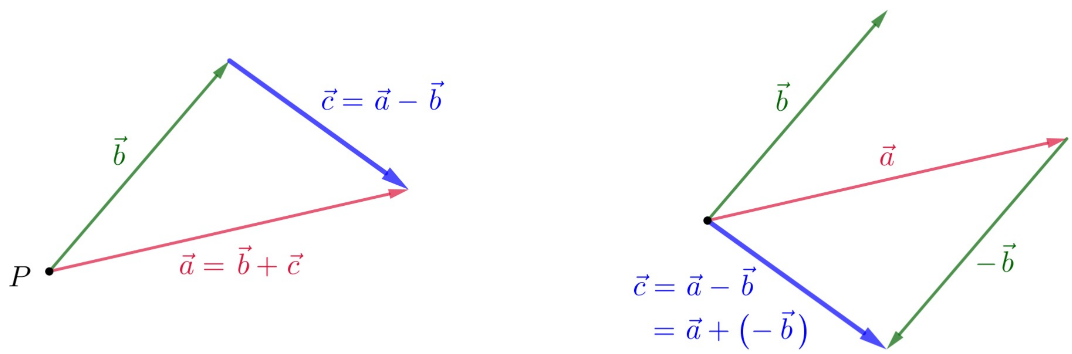


Abbildung 2.4: Zweifache Veranschaulichung zur Subtraktion zweier Vektoren.

Die Subtraktion erfolgt komponentenweise

Unsere beiden Antworten auf die Frage nach der Bedeutung der Differenz zweier Vektoren im vorigen Abschnitt stimmen (zum Glück resp. natürlich) miteinander überein.

Antwort 1 liefert ein besonders anschauliches grafisches Verständnis für $\vec{a} - \vec{b}$, während uns Antwort 2 sofort die Berechnung der Komponenten des Resultates dieser Vektorsubtraktion erlaubt, weil wir ja bereits wissen, wie die Vektoraddition funktioniert:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

Das wollen wir allgemein festhalten:

Bildung einer Vektordifferenz

Die Differenz zweier Vektoren wird komponentenweise gebildet! D.h., die Subtraktion zwischen den x-, den y- und den z-Komponenten wird getrennt voneinander ausgeführt:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Dieses Resultat hatten wir für die Differenz zweier Ortsvektoren in Gleichung (1.2) auf Seite 4 bereits so festgehalten!

Grafische Veranschaulichung von Vektorsumme und Vektordifferenz

Es ist wirklich wichtig ein gutes Verständnis resp. ein greifbares Bild für die Bedeutung von Addition und Subtraktion zweier Vektoren zur Verfügung zu haben. Abb. 2.5 bringt dieses Verständnis nochmals auf den Punkt. Vektorsumme und Vektordifferenz stehen für die Diagonalen in einem Parallelogramm, das von einem Eckpunkt aus durch zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.

Ich empfehle sehr, dass du dir diese Grafik als Merkhilfe einprägst. Dabei ist besonders für die Differenz wichtig zu wissen, dass $\vec{a} - \vec{b}$ von der Pfeilspitze von $\vec{b}$ zur Pfeilspitze von $\vec{a}$ führt.

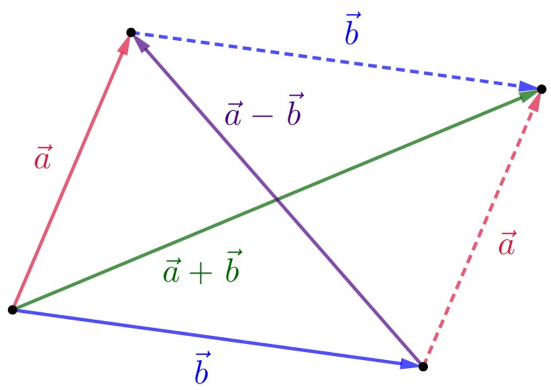


Abbildung 2.5: Summe und Differenz zweier Vektoren auf einen Blick.

2.5 Mittel- und Schwerpunkte

Mittelpunkt zweier Punkte

An einem ähnlichen Parallelogramm wie demjenigen in Abb. 2.5 verstehen wir unmittelbar, wie sich der Mittelpunkt M zwischen zwei Punkten P und Q berechnen lässt. Betrachten wir dazu die linke Seite in Abb. 2.6.

M liegt offensichtlich auf halbem Weg zur O gegenüberliegenden Parallelogrammecke. Der Ortsvektor dieses Mittelpunktes $\vec{M}$ entspricht somit der Hälfte von $\vec{P}+\vec{Q}$:

$$\vec{M} = \frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2} \tag{2.7}$$

Was wir vom **arithmetischen Mittel** $m = \frac{a+b}{2}$ zweier Zahlen a und b her bereits kennen, lässt sich also auf den Mittelpunkt zweier Punkte P und Q übertragen. Effektiv wird bei der Mittelpunktbestimmung einfach komponentenweise das arithmetische Mittel berechnet:

$$\vec{M} = \frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2} = \begin{pmatrix} \frac{x_P+x_Q}{2} \\ \frac{y_P+y_Q}{2} \\ \frac{z_P+z_Q}{2} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

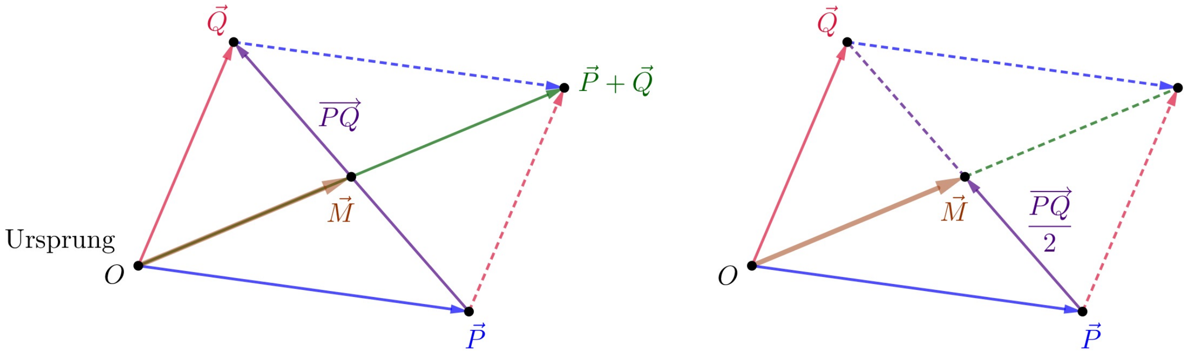


Abbildung 2.6: Der Ortsvektor $\vec{M}$ des Mittelpunktes zweier Punkte mit Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$.

Den Mittelpunkt M zwischen zwei Punkten P und Q erhalten wir gemäss der rechten Seite von Abb. 2.6 aber auch, indem wir an den Ortsvektor $\vec{P}$ die Hälfte des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ anhängen. Überprüfen wir rechnerisch, dass wir sicher dasselbe Resultat erhalten:

$$\vec{M} = \vec{P} + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{PQ} = \vec{P} + \frac{1}{2}\left(\vec{Q}-\vec{P}\right) = \vec{P} + \frac{1}{2}\,\vec{Q} - \frac{1}{2}\,\vec{P} = \frac{1}{2}\,\vec{P} + \frac{1}{2}\,\vec{P} = \frac{\vec{P}+\vec{Q}}{2} \quad \checkmark$$

Dabei haben wir verwendet, dass $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q}-\vec{P}$. Ausserdem sind wir stillschweigend davon ausgegangen, dass die skalare Multiplikation und die Vektoraddition resp. -differenz dem **Distributivgesetz** gehorchen, dass also für einen Skalar k und zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stets gilt:

$$k\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\cdot\vec{a} + k\cdot\vec{b} \qquad \text{und} \qquad k\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = k\cdot\vec{a} - k\cdot\vec{b} \tag{2.9}$$

Davon könnten wir uns problemlos überzeugen, indem wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Komponenten aufschreiben und die Vektoraddition resp. -differenz und auch die skalare Multiplikation explizit mit diesen Komponenten gemäss den Gleichungen (2.2), (2.3) und (2.6) ausführen würden. Das ist aber eher langweilig und bringt keine bahnbrechenden Einsichten mit sich, weshalb wir darauf verzichten wollen.

Streckenaufteilung in ein vorgegebenes Teilstreckenverhältnis

Wir wollen die Mittelpunktsbestimmung gerade um eine Stufe erweitern...

Vorgabe: Es seien P und Q zwei beliebige Punkte und $\overline{PQ}$ ihre gerade Verbindungsstrecke.

Frage: *Wie lässt sich $\overline{PQ}$ in einem bestimmten Zahlenverhältnis, z.B. $3:4$, unterteilen?*

Anders gefragt: Wenn wir die Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ kennen, wie lautet dann der Ortsvektor $\vec{R}$ des Punktes, der die Strecke $\overline{PQ}$ im gewünschten Verhältnis unterteilt?

Wie wir zu einer Antwort gelangen, soll in einer **Übungsaufgabe** überlegt werden. Ich gebe hier nur das allgemeine Resultat wieder.

Aufteilung einer Strecke in einem bestimmten Zahlenverhältnis

Sind die Endpunkte P und Q einer Strecke $\overline{PQ}$ bekannt und soll diese Strecke in einem bestimmten Zahlenverhältnis $m:n$ aufgeteilt werden, so ist der Ortsvektor des Punktes $R \in \overline{PQ}$ gegeben durch:

$$\vec{R} = \frac{n \cdot \vec{P} + m \cdot \vec{Q}}{m+n} = \frac{n}{m+n} \cdot \vec{P} + \frac{m}{m+n} \cdot \vec{Q} \tag{2.10}$$

Der Ortsvektor $\vec{R}$ entspricht einer gewichteten Mittelung der beiden Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ mit Gewichten n und m.

Abb. 2.7 veranschaulicht dieses Resultat. Soll die Strecke $\overline{PQ}$ im Verhältnis $3:4$ unterteilt werden mit dem grösseren Streckenabschnitt auf der Seite von Q, so muss der Punkt P in der Mittelung das grössere Gewicht erhalten, sodass der Punkt R eben näher bei P zu liegen kommt!

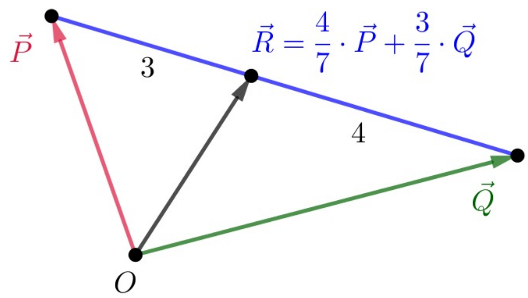


Abbildung 2.7: Das gewichtete Mittel der Ortsvektoren $\vec{P}$ und $\vec{Q}$ unterteilt die Strecke $\overline{PQ}$ im gewünschten Verhältnis.

Schwerpunkt zweier Punktmassen

Vorgabe: Im Punkt P sitze die Masse m_P, im Punkt Q die Masse m_Q.

Frage: *Wo haben m_P und m_Q ihren gemeinsamen Schwerpunkt S?*

Antwort: Zunächst ist klar, dass der Schwerpunkt S auf der direkten Verbindungslinie zwischen P und Q liegt. Denken wir uns diese Verbindungslinie als einen (masselosen) Stab, an dessen Enden die beiden Massen m_P und m_Q sitzen, so können wir die Frage nach dem Schwerpunkt umformulieren:

An welcher Stelle S muss ich den Stab stützen, damit er aufgrund der beiden Massen weder auf die eine, noch auf die andere Seite kippt (vgl. Abb. 2.8)?

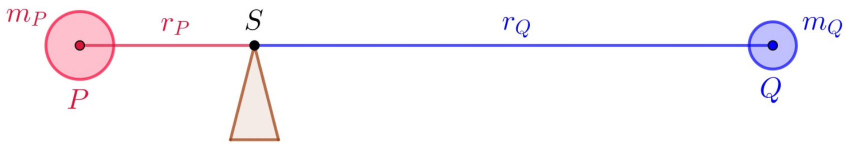


Abbildung 2.8: Der Schwerpunkt der beiden Massen ist derjenige Punkt S, an dem der Stab gestützt werden kann, ohne dass er auf eine der beiden Seiten kippt.

Hier hilft uns die **klassische Mechanik** für sogenannte starre Körper weiter. Sie lehrt uns, dass im Gleichgewicht beide Massen gleich stark den Stab zu drehen versuchen. Dabei kommt es einerseits auf die Massen m_P und m_Q an, andererseits aber auch auf die **Hebelarme** r_P und r_Q (Distanzen zum Drehpunkt S).

Das Produkt $r \cdot m$ ist ein Mass für die drehende Wirkung der Masse m. Im Gleichgewicht müssen sich diese drehenden Wirkungen aufheben, sodass folgt:

$$r_P \cdot m_P \stackrel{!}{=} r_Q \cdot m_Q \qquad \Leftrightarrow \qquad r_P : r_Q = m_Q : m_P$$

Das bedeutet, die Strecke $\overline{PQ}$ muss für das Gleichgewicht im Verhältnis $m_Q : m_P$ unterteilt werden. Wie dies geht, haben wir aber im vorigen Abschnitt bereits gesehen! Wir setzen in Gleichung (2.10) $m = m_Q$ und $n = m_P$ ein und erhalten:

$$\vec{S} = \frac{m_P \cdot \vec{P} + m_Q \cdot \vec{Q}}{m_P + m_Q} = \frac{m_P}{m_P + m_Q} \cdot \vec{P} + \frac{m_Q}{m_P + m_Q} \cdot \vec{Q} \tag{2.11}$$

Schwerpunkte beliebig vieler Punktmassen

Dieses Resultat lässt sich auf eine beliebige Anzahl Punktmassen erweitern:

Schwerpunkt von n Punktmassen

$m_1, \ldots, m_n$ seien n Punktmassen an den Orten $P_1, \ldots, P_n$ resp. mit den Ortsvektoren $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_n$. Dann ist der Ortsvektor $\vec{S}$ des Schwerpunkts S dieser n Punktmassen gegeben durch:

$$\vec{S} = \frac{m_1 \cdot \vec{P}_1 + \ldots + m_n \cdot \vec{P}_n}{m_1 + \ldots + m_n} \tag{2.12}$$

Der Schwerpunkt entspricht einer gewichteten Mittelung aller Ortsvektoren, wobei die einzelnen Massen jeweils als Gewichte ihres Ortes einfliessen.

Kapitel 3

Einschub: Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$

In Abschnitt 1.1 hatten wir den $\mathbb{R}^3$ als mathematische Beschreibung des realen Raumes vorgestellt. Jeder Ort entspricht einem mathematischen Punkt mit drei reellen Koordinaten: $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Diesen als realen Raum interpretierten $\mathbb{R}^3$ haben wir benutzt um Vektoren als **Verschiebungen** $\overrightarrow{PQ}$ zwischen zwei Punkten P und Q zu verstehen. Wir haben gesehen: Vektoren im $\mathbb{R}^3$ besitzen drei reelle Komponenten, von der uns jede einzelne sagt, um wie viel in die jeweilige Achsenrichtung verschoben werden soll. Auf dieser anschaulichen Vorstellung basierten auch die fundamentalen Rechenregeln (Addition, skalare Multiplikation), die wir im Kapitel 2 kennengelernt haben.

Weiter haben wir im Abschnitt 1.3 gesehen, dass sich jeder Punkt P auch als **Ortsvektor** $\vec{P}$, auffassen lässt. Der Vektor $\vec{P}$ beschreibt, wie ich vom Ursprung zum Punkt P gelange.

Diese bisherigen Gedanken vor Augen sollten wir uns nun nochmals fragen: Was ist denn jetzt ganz allgemein ein Vektor? Eine Verschiebung oder ein Punkt oder was?

Die mathematisch fundierte Antwort auf diese Frage kann ich nur geben, indem ich etwas aushole und ein wesentlich allgemeineres Konzept namens **Vektorraum** vorstelle. Die Antwort lautet damit dann einfach: **Vektoren sind die Elemente eines Vektorraums.** Das schreit natürlich nach mehr Erläuterung, die ich geben kann, sobald einmal sauber definiert ist, was denn ein Vektorraum ist...

Definition des (reellen) Vektorraums

Ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer Abbildung (genannt Addition)

$$\begin{aligned} + : \quad V \times V &\longrightarrow V \\ (a, b) &\longmapsto a + b \end{aligned}$$

und einer Abbildung (genannt skalare Multiplikation)

$$\begin{aligned} \cdot : \quad \mathbb{R} \times V &\longrightarrow V \\ (k, a) &\longmapsto k \cdot a \end{aligned}$$

heisst **reller Vektorraum**, *wenn für die Abbildungen $+$ und $\cdot$ die folgenden acht Axiome gelten:*

(1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ *für alle* $a, b, c \in V$.

(2) $a + b = b + a$ *für alle* $a, b \in V$.

(3) *Es gibt ein Element* $0 \in V$ *mit* $a + 0 = a$ *für alle* $a \in V$.

(4) *Zu jedem* $a \in V$ *gibt es ein Element* $-a \in V$ *mit* $a + (-a) = 0$.

(5) $k \cdot (l \cdot a) = (k \cdot l) \cdot a$ *für alle* $k, l \in \mathbb{R}$, $a \in V$.

(6) $1 \cdot a = a$ *für alle* $a \in V$.

(7) $k \cdot (a + b) = k \cdot a + k \cdot b$ *für alle* $k \in \mathbb{R}$, $a, b \in V$.

(8) $(k + l) \cdot a = k \cdot a + l \cdot a$ *für alle* $k, l \in \mathbb{R}$, $a \in V$.

Erläuterungen zur Vektorraumdefinition

- Zunächst sei darauf hingewiesen, dass obige Vektorraumdefinition gar nichts Näheres darüber sagt, was V für eine Menge ist resp. was ihre Elemente, also **Vektoren** wie $a, b, c \in V$ effektiv für Objekte sind. Aus diesem Grund gibt es hier auch keine Vektorpfeilchen über den Buchstaben. Diese sind nämlich reserviert für den Fall $V = \mathbb{R}^3$. Vektoren sind also im rein mathematischen Sinne nicht "Grössen mit Betrag und Richtung", sondern zunächst einmal einfach Elemente eines Vektorraumes.

  Das Konzept des Vektorraumes ist dazu gedacht auf ganz viele verschiedene "Dinge" angewendet zu werden. Bereits ohne weitere Informationen können gewisse Eigenschaften des allgemeinen Vektorraums untersucht und einige Zusammenhänge bewiesen werden. Diese gelten dann für alle möglichen Vektorräume. Das ist das Tolle an der Sache.[1]

- Damit eine Menge von Elementen die Menge V eines Vektorraums sein kann, müssen auf ihr die beiden Operationen **Addition** und **Multiplikation** so definiert sein, dass alle acht **Axiome** erfüllt sind. Dabei sind die Begriffe Addition und Multiplikation zunächst einmal sehr flexibel zu verstehen. Mittlerweile kannst du aufgrund deiner Erfahrung nachvollziehen, dass damit nicht unbedingt die Addition oder die Multiplikation zweier Zahlen gemeint sein muss. Addition und Multiplikation müssen einfach sinnvoll sein für die Elemente von V.

- Betrachten wir die Deklaration der Addition: $+ : V \times V \to V$ bedeutet, die Addition nimmt zwei Elemente aus V und macht daraus wieder ein Element von V. D.h., aus dem Paar (a, b) wird das Element $c = a + b$ gemacht, das wiederum in V liegen muss.

  Analoges gilt für die skalare Multiplikation: $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ bedeutet, die skalare Multiplikation nimmt als Skalar eine reelle Zahl $k \in \mathbb{R}$ und ein Element aus V und macht daraus wieder ein Element von V. D.h., aus dem Paar (k, a) wird das Element $b = k \cdot a$ gemacht, das wiederum in V liegen muss.

- Obige Definition ist diejenige für einen **reellen** Vektorraum. Damit wird einfach gesagt, dass die Skalare, mit denen die skalare Multiplikation durchgeführt werden soll, reelle Zahlen $k \in \mathbb{R}$ sein sollen. Man kann auch Vektorräume mit Skalaren aus anderen Zahlenmengen definieren, aber damit wollen wir uns hier nicht weiter beschäftigen.

- Werfen wir schliesslich einen Blick auf die acht Axiome. Ein paar davon haben mit Begriffen zu tun, die wir zum Teil sogar bereits kennen.

  (1)+(2): Die Addition von Elementen des Vektorraumes muss sowohl **assoziativ** (1), als auch **kommutativ** (2) sein.

  (3)+(4): Jeder Vektorraum besitzt genau ein **Nullelement** 0, das durch (3) festgelegt wird. Es wird auch als "Null" oder "Nullvektor" bezeichnet.

  (4): Zu jedem Element a gibt es ein **negatives Element** oder eben den **Gegenvektor** $-a$. Er ist durch (4) eindeutig festgelegt.

  (5): Die skalare Multiplikation muss auf die durch (5) beschriebene Weise ebenfalls **assoziativ** sein.

  (6): Die Multiplikation mit der Zahl 1 lässt einen Vektor unverändert.
  Achtung: Hier ist die Zahl 1 wirklich die reelle Zahl $1 \in \mathbb{R}$. Im Gegensatz dazu ist das Nullelement 0 ein Element von V, also i.d.R. keine reelle Zahl.

  (7)+(8): Addition und skalare Multiplikation erfüllen diese beiden **Distributivgesetze**.

[1] Im Moment ist vermutlich nicht so klar, auf wie viele Dinge das Konstrukt des Vektorraums angewendet werden kann. Ich kann dir aber versichern: Der Vektorraum ist eines der allerwichtigsten mathematischen Objekte. Ohne ihn wäre die Mathematik nicht das stabile Fundament für die moderne Naturwissenschaft, die im 20. Jahrhundert entwickelt wurde.

Unsere Verwendung des Vektorraums $\mathbb{R}^3$

Nachdem nun allgemein deklariert ist, was ein Vektorraum ist, können wir uns besser darüber Gedanken machen, wie wir dieses Konzept verwenden.

Unsere Menge V, auf der wir unsere Vektorräume aufbauen, ist jeweils der $\mathbb{R}^3$, also die Menge aller möglichen Zahlentripel (x, y, z) mit $x, y, z \in \mathbb{R}$. Der Einfachheit halber sprechen wir vom **Vektorraum** $\mathbb{R}^3$, auch wenn wir ihn streng genommen mit $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ bezeichnen müssten. Was die Addition und die skalare Multiplikation für Elemente des $\mathbb{R}^3$ standardmässig sind, ist aber dermassen klar, dass wir es nicht jedes Mal extra zu erwähnen brauchen.

Mit der Vorgabe $V = \mathbb{R}^3$ ist allerdings noch gar nichts darüber gesagt, welche Anschauung wir mit einem einzelnen Zahlentripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ verbinden. Es kommen dafür im Prinzip alle möglichen Objekte in Frage, die durch drei reelle Zahlen sinnvoll beschrieben werden können. Und so ergeben sich eben unterschiedliche Anwendungsmöglichkeiten des Vektorraums $\mathbb{R}^3$, beispielsweise:

$\boldsymbol{(x, y, z)} \in \mathbb{R}^3 \;\hat{=}$ **Koordinaten eines Punktes $\boldsymbol{P}$ resp. Ortsvektor $\boldsymbol{\vec{P}}$:** Wir interpretieren das Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ als die Beschreibung eines Punktes P in einem Koordinatensystem resp. als Ortsvektor $\vec{P}$, der mich von einem vorgegebenen Ursprung O aus durch Verschiebungen entlang dreier Achsen zu P bringt. Das Nullelement ist der Ursprung O resp. $\vec{O}$.

$\boldsymbol{(x, y, z)} \in \mathbb{R}^3 \;\hat{=}$ **Verschiebung im Raum:** Das Tripel $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ steht für die Verschiebung eines Punktes oder eines Objektes aus vielen Punkten. Die Komponenten geben die Verschiebungen entlang dreier Achsen an. Hier ist das Nullelement der Nullvektor $\vec{0}$.

$\boldsymbol{(a, b, c)} \in \mathbb{R}^3 \;\hat{=}$ **quadratische Funktion:** Wir fassen die drei Zahlen a, b und c als die Koeffizienten der allgemeinen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ auf. Dadurch werden alle möglichen quadratischen Funktionen abgedeckt – inklusive aller linearen und konstanten Funktionen, die für $a = 0$ resp. $a, b = 0$ darin enthalten sind. Tatsächlich bildet die Menge aller quadratischen Funktionen einen Vektorraum. Du kannst dir selber überlegen, wie wohl die Addition und die skalare Multiplikation mit quadratischen Funktionen auszusehen haben, damit die acht Axiome erfüllt sind. Das Nullelement 0 ist hier übrigens die Nullfunktion $f(x) = 0$.

In der Vektorgeometrie verwenden wir eine Art Kombination der ersten beiden Beispiele. Wir sprechen über Orte (Punkte) im Raum und über Verschiebungen zwischen diesen Punkten. Wir haben es also mit Orts- und mit Verschiebungsvektoren zu tun. Dass beide Dinge vom Verständnis her nicht dasselbe sind, wird klar, wenn wir an den Unterschied zwischen Orten und Strecken auf einer einzelnen Zahlenachse denken. Eine Zahl x ist eine Stelle auf der x-Achse, währenddem eine Strecke $\Delta x = x_2 - x_1$ den Unterschied zwischen zwei solchen Stellen beschreibt. Die Strecke ist ein Abschnitt der x-Achse! Analog dazu ist ein Verschiebungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ eben eine Differenz zwischen zwei Punkten P und Q im Raum. Das haben wir ganz explizit gesehen: $\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}$.

Zum Glück ist die Gefahr nicht besonders gross, Orte und Verschiebungen miteinander zu verwechseln, denn die anschauliche Vorstellung des realen, dreidimensionalen Raumes gibt in der Regel sofort Aufschluss darüber, worüber wir gerade sprechen. Egal, ob wir nun Orts- oder Verschiebungsvektoren in $\mathbb{R}^3$, die Addition und die skalare Multiplikation erfüllen, so wie wir sie kennengelernt haben, auf jeden Fall die acht Axiome des Vektorraums.

Das letzte der drei Beispiele oben habe ich angefügt, damit du siehst, dass auch andere Objekte durch die Elemente eines $\mathbb{R}^3$ beschrieben werden können. Auch auf diese Objekte kann das Vektorraumkonzept angewendet werden und alles, was allgemein für Vektorräume überlegt und bewiesen werden kann, gilt auch für solche Anwendungen!

Schliesslich sei noch angemerkt, dass wir ab und zu auch den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit Paaren (x, y) resp. Vektoren $\binom{x}{y}$ als Elemente betrachten. Diesen bringen wir typischerweise mit einem x-y-Koordinatensystem in Verbindung. Vektoren stehen für Punkte oder Verschiebungen stehen und wir notieren sie ebenfalls mit einem Vektorpfeilchen. Der $\mathbb{R}^2$ kann stets als Einschränkung des $\mathbb{R}^3$ auf Punkte resp. Vektoren mit z-Koordinate resp. -Komponente 0 aufgefasst werden.

Kapitel 4

Lineare Unabhängigkeit und Basen des $\mathbb{R}^3$

4.1 Kollinearität – lineare Abhängigkeit zweier Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ heissen **kollinear** resp. **linear abhängig**, wenn es einen Skalar $k \in \mathbb{R}$ gibt, sodass:

$$\vec{v} = k \cdot \vec{u} \tag{4.1}$$

- Geometrisch bedeutet **Kollinearität** resp. **lineare Abhängigkeit zweier Vektoren** also, dass beide parallel oder antiparallel zueinander ausgerichtet sind. Schliesslich ist $\vec{v}$ das Resultat aus der skalaren Multiplikation von $\vec{u}$ mit k und steht somit eben genau parallel oder antiparallel zu $\vec{u}$ (vgl. Abschnitt 2.2).

- Zwei Vektoren sind **nicht-kollinear** resp. **linear unabhängig**, wenn es keinen Skalar k gibt, für den (4.1) zutrifft.

- Gilt (4.1) für den Vektor $\vec{v}$, so natürlich auch $\vec{u} = l \cdot \vec{v}$ mit $l = \frac{1}{k} \in \mathbb{R}$. Die lineare Abhängigkeit resp. Kollinearität ist also stets eine Aussage, die beide Vektoren umfasst. Wenn $\vec{v}$ kollinear zu $\vec{u}$ ist, dann ist eben auch $\vec{u}$ kollinear zu $\vec{v}$. Daher unterscheiden wir diese Fälle auch gar nicht voneinander, sondern sagen einfach: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind kollinear.

4.2 Komplanarität – lineare Abhängigkeit dreier Vektoren

Drei paarweise nicht-kollineare Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ heissen **komplanar** resp. **linear abhängig**, wenn es zwei Skalare $m, n \in \mathbb{R}$ gibt, sodass:

$$\vec{w} = m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} \tag{4.2}$$

- Gleichung (4.2) besagt, dass der Vektor $\vec{w}$ eine sogenannte **Linearkombination** der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist. Das bedeutet: $\vec{w}$ ist eine Summe über skalare Vielfache von $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

  Der Begriff **Linearkombination** ist von grosser Bedeutung für die gesamte Mathematik. Merke ihn dir gut!

- **Komplanarität** resp. **lineare Abhängigkeit dreier Vektoren** bezeichnet den geometrischen Umstand, dass drei Vektoren bezüglich ihren Ausrichtungen in ein- und derselben Ebene liegen.

  Genauer: Lassen wir alle drei Vektorpfeile im Ursprung O beginnen, so liegt die Spitze von $\vec{w}$ in der Ebene, die von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannt wird. Abb. 4.1 oben auf der folgenden Seite veranschaulicht diese Aussage.

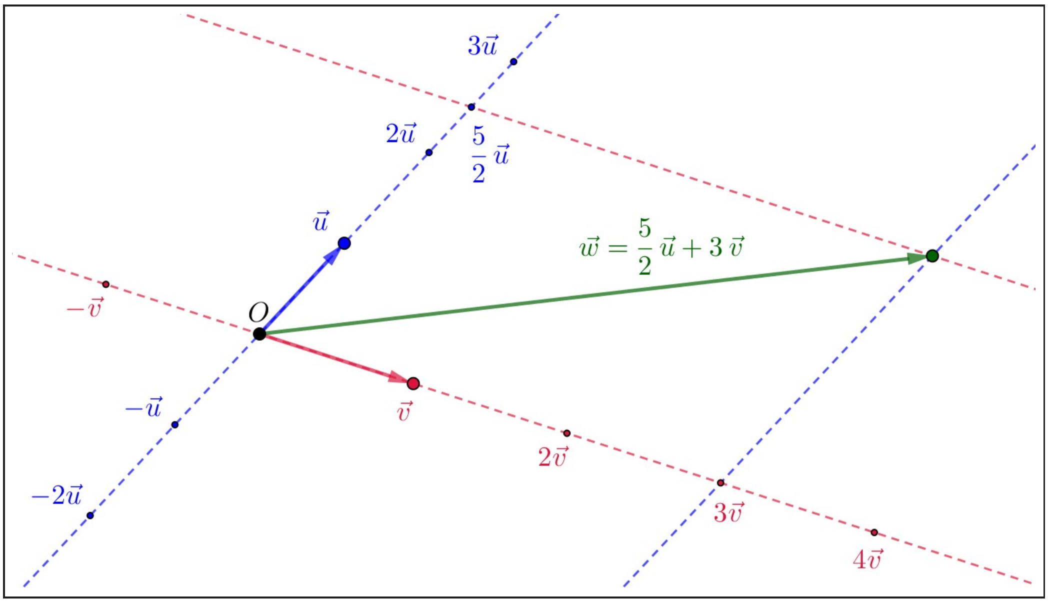


Abbildung 4.1: Drei komplanare Vektoren. Jeder der drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ lässt sich als Summe von Vielfachen der anderen beiden Vektoren ausdrücken.

- Die Komplanarität umfasst als Aussage stets drei Vektoren. Sind drei paarweise nicht-kollineare Vektoren komplanar, so ist jeder einzelne eine Linearkombination der beiden anderen. Das wollen wir uns am Beispiel von Abb. 4.1 auch rechnerisch verdeutlichen.

  Beispiel: In Abb. 4.1 wird ein Vektor $\vec{w}$ gezeigt, der sich wie folgt als Linearkombination der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben lässt:

  $$\vec{w} = \frac{5}{2} \cdot \vec{u} + 3 \cdot \vec{v}$$

  Diese Gleichung lässt sich aber ebenso gut nach $\vec{u}$ oder $\vec{v}$ auflösen:

  $$\vec{u} = \frac{2}{5} \cdot \vec{w} - \frac{6}{5} \cdot \vec{v} \qquad \text{und} \qquad \vec{v} = \frac{1}{3} \cdot \vec{w} - \frac{5}{6} \cdot \vec{v}$$

- Bei obiger Definition der Komplanarität haben wir gefordert, dass die drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ paarweise linear unabhängig sind. Allerdings sind $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ auch dann komplanar, wenn zwei oder oder sogar drei von ihnen kollinear sind. Dann kann man sie nämlich automatisch in ein- und dieselbe Ebene legen.

  $\vec{w}$ kann in einem solchen Fall aber nicht unbedingt als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ geschrieben werden. Sind nämlich $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear, aber $\vec{u}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig, dann gibt es keine zwei Skalare $m, n \in \mathbb{R}$, die Gleichung (4.2) erfüllen würden.

  Gleichung (4.1) ist also nur für drei paarweise nicht-kollineare Vektoren das harte Kriterium für die Komplanarität. Im Prinzip kann man aber vorher überprüfen, ob von den drei Vektoren zwei kollinear sind. Ist dies der Fall, so ist die Komplanarität automatisch auch erfüllt.

Überprüfung der Komplanarität in einem Beispiel

Betrachten wir zur Verdeutlichung drei ganz konkrete Vektoren, um mitzubekommen, wie Komplanarität aussieht, wenn man sie antrifft. Gegeben seien also die drei folgenden Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Zuerst stellen wir fest, dass keine zwei dieser drei Vektoren kollinear sind. Das sieht man wirklich ganz unmittelbar, insbesondere wenn man rasch über die x-Komponenten nachdenkt...

Nun setzen wir Gleichung (4.2) an, um die Skalare m und n zu bestimmen:

$$m \cdot \vec{u} + n \cdot \vec{v} = \vec{w} \qquad \Rightarrow \qquad m \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung entspricht eigentlich einem linearen Gleichungssystem mit drei Gleichungen in den Unbekannten m und n:

$$\left| \begin{array}{c} 4m + n = 0 \\ 8m + 3n = -2 \\ 4m - 2n = 6 \end{array} \right|$$

Gleichungssysteme mit drei linearen Gleichungen hatten wir schon früher gesehen, allerdings hatten wir damals festgestellt, dass drei Gleichungen braucht, um drei Unbekannte eindeutig festzulegen. Nun haben wir drei Gleichungen, aber nur zwei Unbekannte. Das Gleichungssystem ist folglich **überbestimmt** und es ist quasi Zufall, wenn die eindeutigen Werte für m und n, die wir beispielsweise aus den ersten beiden Gleichungen erhalten können, auch noch die dritte Gleichung erfüllen.

Das überrascht uns nicht, denn es ist ja sicher nicht der Normalfall, dass ein beliebig ausgewählter dritter Vektor $\vec{w}$ in derselben Ebene liegt wie die ersten beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Lösen wir nun also zuerst das lineare 2x2-Gleichungssystem bestehend aus den oberen beiden Gleichungen, um je einen Wert für m und für n festzulegen:

$$\left| \begin{array}{c} 4m + n = 0 \\ 8m + 3n = -2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -8m - 2n = 0 \\ 8m + 3n = -2 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \underline{n = -2} \quad \Rightarrow \quad \underline{m = \frac{1}{2}}$$

Sollen die drei Vektoren komplanar sein, so müssen diese Werte für m und n im anfänglichen Gleichungssystem nun auch die unterste Gleichung erfüllen. Das überprüfen wir:

$$4m - 2n = 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot (-2) = 2 + 4 = 6 \quad \checkmark$$

Damit haben wir gezeigt, dass die drei Vektoren tatsächlich komplanar sind.

Vektoren in allgemeiner Lage

An dieser Stelle wollen wir noch kurz festhalten:

Drei zufällig ausgesuchte Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind weder paarweise kollinear, noch sind sie komplanar. Genau solche nicht speziell aufeinander abgestimmte Vektoren meinen wir in Zukunft, wenn wir von zwei oder drei Vektoren **in allgemeiner Lage** sprechen. Zwei oder drei Vektoren in allgemeiner Lage sollen also stets **linear unabhängig** voneinander sein.

4.3 Basen des $\mathbb{R}^3$

Vorgabe: Gegeben seien drei von $\vec{0}$ verschiedene, linear unabhängige, also nicht-komplanare Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Aussage: Jeder beliebige Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ kann als eindeutige Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ geschrieben werden. Das bedeutet, die Gleichung resp. das Gleichungssystem

$$\vec{v} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \qquad \text{resp.} \qquad \left| \begin{array}{l} v_x = r \cdot a_x + s \cdot b_x + t \cdot c_x \\ v_y = r \cdot a_y + s \cdot b_y + t \cdot c_y \\ v_z = r \cdot a_z + s \cdot b_z + t \cdot c_z \end{array} \right| \tag{4.3}$$

hat eine eindeutige Lösung (r, s, t).

"Beweis": Man kann zeigen, dass diese Aussage direkt aus der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ folgt, was wir zu einem späteren Zeitpunkt nachholen werden. Uns reicht an dieser Stelle vorerst eine **Plausibilitätsbetrachtung**, die in Abb. 4.2 veranschaulicht wird:

Fassen wir $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ als drei Ortsvektoren auf, so liegen der Ursprung O, der Punkt A und der Punkt B in einer bestimmten Ebene E, nicht aber der Punkt C, denn $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind ja gemäss Voraussetzung nicht-komplanar. Mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich folglich jeder beliebigen Punkt $P \in E$ erreichen, aber keine Punkt ausserhalb von E. Dazu wird der Vektor $\vec{c}$ benötigt. Anschaulich gibt es genau einen Punkt $P \in E$, von dem aus ich mit dem Vektor $\vec{c}$ zum Punkt V gelangen kann. Dazu braucht es ein bestimmtes Vielfaches $t \cdot \vec{c}$ des Vektors $\vec{c}$. Genauso gehört zum Punkt P gehört eine ganz bestimmte Linearkombination $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Das bedeutet aber, zum Ortsvektor $\vec{v}$ gehört die eindeutige Linearkombination $\vec{v} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$.

Basis: Halten wir nochmals fest: Jeder beliebige Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ kann mit (4.3) als eindeutige Linearkombination dreier linear unabhängiger Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}$ geschrieben werden.

Aus diesem Grund bezeichnen wir jedes linear unabhängige Tripel $B(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ als **Basis** des $\mathbb{R}^3$.

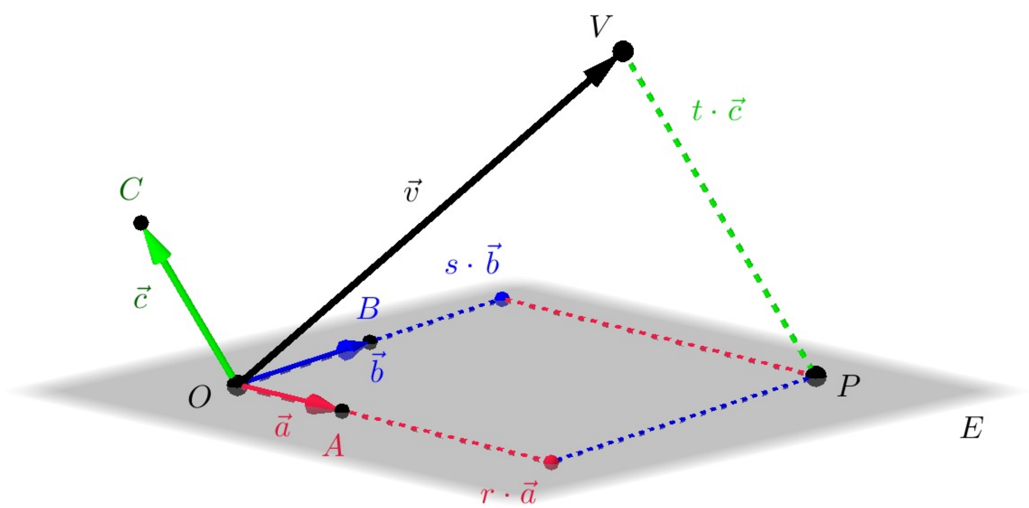


Abbildung 4.2: Der Ortsvektor $\vec{v}$ ist eine eindeutige Linearkombination der drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

Beispiel: Beschreibung eines Vektors in einer neuen Basis

Zur Veranschaulichung gebe ich mir drei linear unabhängige Vektoren $\vec{a}$,$\vec{b}$ und $\vec{c}$ vor, die ich als neue Basis $B(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ des $\mathbb{R}^3$ auffassen möchte:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun möchte ich einen bestimmten Vektor $\vec{v}$ in dieser neuen Basis B ausdrücken:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3r + 2s + t = 7 \\ r + 0s + 7t = -5 \\ -r + 3s + t = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3r + 2s + t = 7 \\ r = -5 - 7t \\ -r + 3s + t = 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} ① \\ ② \\ ③ \end{array}$$

② in ① und ③: $\left| \begin{array}{c} 3(-5 - 7t) + 2s + t = 7 \\ 5 + 7t + 3s + t = 0 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} s = 11 + 10t \\ 3s + 8t = -5 \end{array} \right| \begin{array}{c} ④ \\ ⑤ \end{array}$

④ in ⑤: $3(11 + 10t) + 8t = -5 \quad \Leftrightarrow \quad 38t = -38 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = -1}$

in ④ und in ②: $s = 11 - 10 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{s = 1}$ und $r = -5 + 7 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r = 2}$

Damit hat der Vektor $\vec{v}$ in der Basis B die Komponenten 2, 1 und -1. Man kann also schreiben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}_B$$

Dabei bringt der Index B zum Ausdruck, dass es sich um eine Angabe bezüglich der Basis B handelt.

Orthogonalität und Normiertheit

Von einer Basis werden manchmal zusätzliche Eigenschaften verlangt. Die beiden wichtigsten sind:

Orthogonalität: Stehen die drei Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht zueinander, so sagen wir, sie sind **orthogonal** und $B(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ist eine **orthogonale Basis**.

Normiertheit: Haben die drei Basisvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ je den Betrag 1, handelt es sich also um Einheitsvektoren, so sagen wir, sie sind **normiert** und $B(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ist eine **normierte Basis**.

Eine Basis, die gleichzeitig orthogonal und normiert ist, wird auch als **Orthonormalbasis** bezeichnet.

Die Standardbasis (kartesische Basis)

Vielleicht ist dir nun bereits durch den Kopf gegangen, dass wir seit dem Start der Vektorgeometrie sämtliche Vektoren bezüglich einer ganz bestimmten Basis notieren. Dabei handelt es sich um die sogenannte **Standardbasis** des $\mathbb{R}^3$ mit den Basisvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{sodass:} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \tag{4.4}$$

Die Standardbasis ist offensichtlich eine Orthonormalbasis. Ohne weitere Angaben notieren wir alle Vektoren bezüglich dieser Standardbasis.

Ganz analog gibt es eine Standardbasis für den $\mathbb{R}^2$:

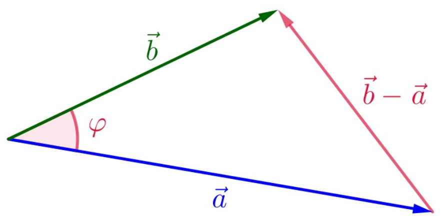
$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Kapitel 5

Das Skalarprodukt

5.1 Die Anwendung des Cosinussatzes auf ein Vektordreieck

Wir wollen in diesem Kapitel erfahren, wie die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren funktioniert. Als Vorüberlegung dazu holen wir zunächst den **Cosinussatz** aus unserem mathematischen Fundus und betrachten damit die Situation in Abb. 5.1.



Cosinussatz
$|\vec{b}-\vec{a}\,|^2 = |\vec{a}\,|^2 + |\vec{b}\,|^2 - 2\cdot|\vec{a}\,|\cdot|\vec{b}\,|\cdot\cos\varphi$

Abbildung 5.1: Der Cosinussatz angewendet auf zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und ihre Differenz $\vec{b}-\vec{a}$.

Der Cosinussatz verbindet die Seitenlängen eines Dreiecks mit einem Winkel. In der Vektorgeometrie sollte uns dies ermöglichen aus Vektorbeträgen auf Winkel zu schliessen.

In Abb. 5.1 ist rechts bereits der Cosinussatz für die Vektorbeträge $|\vec{a}\,|$, $|\vec{b}\,|$ und $|\vec{b}-\vec{a}\,|$ und den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ notiert. Die Vektorbeträge entsprechen den Seitenlängen des Dreiecks links. Mit $a=|\vec{a}\,|$ und $b=|\vec{b}\,|$ notieren wir diesen Cosinussatz gleich nochmals:

$$|\vec{b}-\vec{a}\,|^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\varphi \tag{5.1}$$

Nun lassen sich die Betragsquadrate a^2 und b^2 bekanntlich einfach durch die Vektorkomponenten ausdrücken:

$$a^2 = a_x^2+a_y^2+a_z^2 \qquad \text{und} \qquad b^2 = b_x^2+b_y^2+b_z^2 \tag{5.2}$$

Ebenso kann $|\vec{b}-\vec{a}\,|^2$ auf die Vektorkomponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zurückgeführt werden:

$$\begin{aligned}
|\vec{b}-\vec{a}\,|^2 = \left|\begin{pmatrix} b_x-a_x \\ b_y-a_y \\ b_z-a_z \end{pmatrix}\right|^2 &= (b_x-a_x)^2+(b_y-a_y)^2+(b_z-a_z)^2 \\
&= b_x^2-2a_xb_x+a_x^2+b_y^2-2a_yb_y+a_y^2+b_z^2-2a_zb_z+a_z^2 \\
&= \underbrace{a_x^2+a_y^2+a_z^2}_{=a^2}+\underbrace{b_x^2+b_y^2+b_z^2}_{=b^2}-2a_xb_x-2a_yb_y-2a_zb_z \\
&= a^2+b^2-2(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Setzen wir (5.3) auf der linken Seite in den Cosinussatz (5.1) ein, so streichen sich die Betragsquadrate auf beiden Gleichungsseiten heraus und wir erhalten eine ganz neue Beziehung:

$$\begin{aligned}
& |\vec{b}-\vec{a}\,|^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\varphi && |\,(5.3) \text{ einsetzen} \\
\Rightarrow\quad & a^2+b^2-2(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z) = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\varphi && |\,-a^2-b^2 \\
\Leftrightarrow\quad & -2(a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z) = -2ab\cdot\cos\varphi && |\,:(-2) \\
\Leftrightarrow\quad & a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z = ab\cdot\cos\varphi && (5.4)
\end{aligned}$$

Damit haben wir direkt vor Augen, wie sich der Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen lässt. Wir brauchen (5.4) nur noch nach φ aufzulösen:

$$\begin{aligned}
& ab\cdot\cos\varphi = a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z && |\,:(ab) \\
\Rightarrow\quad & \cos\varphi = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{ab} && |\,\arccos(\ldots) \\
\Leftrightarrow\quad & \varphi = \arccos\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{ab} && (5.5)
\end{aligned}$$

Zur Winkelbestimmung werden die Vektorbeträge a und b benötigt und im Zähler von (5.5) muss eine Summe über die Produkte der einzelnen Vektorkomponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gebildet werden.

That's it! Wir mussten zu unserer bisherigen Vektorgeometrie lediglich den Cosinussatz hinzufügen und schon sind wir in der Lage Winkel zwischen Vektoren zu bestimmen.

An dieser Stelle verzichte ich auf ein Rechenbeispiel. Es wird im übernächsten Abschnitt folgen.

5.2 Die Definition des Skalarproduktes

Die Winkelberechnung im vorigen Abschnitt enthielt mit $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ einen Ausdruck, der sich bei näherer Betrachtung als besonders wichtig erweist, wie wir in Kürze sehen werden. Er ist das Resultat der komponentenweisen Multiplikation zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, wobei über die so entstehenden Produkte summiert wird. Wir definieren:

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

Unter dem **Skalarprodukt** $\vec{a}\cdot\vec{b}$ *zweier Vektoren* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ *verstehen wir die Abbildung:*

$$\begin{aligned}
\cdot\,:\quad \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} && (5.6)\\
(\vec{a},\vec{b}) &\longmapsto \vec{a}\cdot\vec{b} := a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z
\end{aligned}$$

Die beiden Vektoren werden also komponentenweise miteinander multipliziert und anschliessend werden die drei Produkte addiert.

Ganz analog dazu definieren wir das **Skalarprodukt** *für zwei Vektoren* $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^2$ *wie folgt:*

$$\begin{aligned}
\cdot\,:\quad \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} && (5.7)\\
(\vec{a},\vec{b}) &\longmapsto \vec{a}\cdot\vec{b} := a_xb_x+a_yb_y
\end{aligned}$$

Egal ob im $\mathbb{R}^2$ *oder im* $\mathbb{R}^3$*, die Eigenschaften der Skalarprodukte sind dieselben.*

Anmerkungen zur Definition des Skalarproduktes

- Das Skalarprodukt heisst so, weil eine Art Produkt zweier Vektoren berechnet wird, das Resultat aber ein Skalar, also eine einzelne reelle Zahl ist.

- Bei den beiden Definitionen (5.6) und (5.7) siehst du in der ersten Zeile jeweils die Mengendeklarationen. Dabei bedeutet $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, dass aus zwei Elementen des $\mathbb{R}^3$, also eben aus einem Paar $(\vec{a}, \vec{b})$ von Vektoren, ein Element in $\mathbb{R}$, also eine reelle Zahl, gemacht wird.

- Zunächst mag es irritierend erscheinen, dass wir zur Notation des Skalarproduktes dasselbe Multiplikationszeichen $\cdot$ wie bei der altbekannten Multiplikation zweier Zahlen oder der skalaren Multiplikation einer Zahl mit einem Vektor verwenden. Das soll uns aber nicht irritieren. Wir sind erfahren genug, dass wir in jeder Situation jeweils erkennen, ob eben zwei Zahlen, eine Zahl und ein Vektor, oder nun neuerdings zwei Vektoren miteinander multipliziert werden.[1]

  Die folgenden drei Ausdrücke meinen also grundverschiedene Arten der Multiplikation, einfach weil nicht dieselbe Kombination von Elementen in die Rechnung hineingegeben wird:

$3 \cdot 5 = 15$	$4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 0 + 4 = 1$
$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
Multiplikation zweier Skalare	Skalare Multiplikation eines Vektors	Skalarprodukt zweier Vektoren

  Im Kapitel 9 werden wir mit dem **Vektorprodukt** noch eine weitere Art der Vektormultiplikation kennenlernen. Zu dessen Darstellung führen wir dann effektiv ein neues Zeichen ein.

5.3 Winkelberechnung mit dem Skalarprodukt

Mit der Notation des Skalarproduktes schreiben wir (5.5) für die Berechnung eines Winkels zwischen zwei Vektoren nun nochmals neu:

Der Zwischenwinkel zweier Vektoren

Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnet sich folgendermassen:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} \quad \text{resp.} \quad \varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} \tag{5.8}$$

Dabei stehen a und b für die Vektorbeträge.

Erste Anmerkungen zur Berechnung des Zwischenwinkels zweier Vektoren

- Der Winkel zwischen zwei Vektoren liegt stets im Intervall $[0°; 180°]$. Das verträgt sich bestens mit der Arcuscosinus-Funktion, denn dies ist eine eindeutige Abbildung $[-1; 1] \rightarrow [0°; 180°]$.

- In der Vektorgeometrie arbeiten wir in der Regel mit dem Gradmass (°). Achte darauf, dass dein Taschenrechner auf dieses Winkelmass eingestellt ist (`DEG` und nicht etwa `RAD`).[2]

[1] **Anmerkung:** Tatsächlich gibt es Lehrbücher, die für das Skalarprodukt eigene Zeichen einführen, z.B. $\bullet$ oder $\circ$. Die meisten kommen allerdings ohne ein spezielles Zeichen aus und auf Stufe Hochschule wird gänzlich darauf verzichtet.

[2] Ja, diese Winkelberechnung mit dem Skalarprodukt ist eine der wenigen Rechnungen, bei denen die Verwendung eines TRs in der Mathe erlaubt ist!

Drei Beispiele zur Winkelberechnung

Beispiel 1: Hier zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die Beträge der beiden Vektoren ergeben sich zu:

$$a = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} \qquad \text{und} \qquad b = \sqrt{2^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}$$

Somit erhalten wir für den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \arccos \frac{(-2) \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} = \arccos \frac{-7}{\sqrt{14 \cdot 41}} \approx \underline{\underline{107.0^\circ}}$$

Beispiel 2: Schauen wir uns zwei zweidimensionale Vektoren an:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad \text{und} \quad b = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

Für den Winkel zwischen den beiden Vektoren folgt daraus:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \arccos \frac{(-3) \cdot (-12) - 4 \cdot 5}{5 \cdot 13} = \arccos \frac{16}{5 \cdot 13} \approx \underline{\underline{75.7^\circ}}$$

Bemerke: Mit Vektoren $\in \mathbb{R}^2$ funktioniert die Winkelberechnung tatsächlich ganz genau gleich. Das liegt daran, dass wir unsere anfängliche Überlegung mit dem Cosinussatz ebenso gut mit zweidimensionalen Vektoren hätten anstellen können und dabei eben dasselbe Resultat mit dem Skalarprodukt für Vektoren $\in \mathbb{R}^2$ erhalten hätten.

Beispiel 3: Betrachten wir nochmals zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 7 \\ -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Daraus folgt zunächst die Berechnung der Beträge:

$$a = \sqrt{3 + 1 + 12} = \sqrt{16} = 4 \qquad \text{und} \qquad b = \sqrt{3 + 49 + 12} = \sqrt{64} = 8$$

Schliesslich erhalten wir für den Winkel zwischen den beiden Vektoren:

$$\varphi = \arccos \frac{-(\sqrt{3}\,)^2 + 7 + (-2\sqrt{3}\,)^2}{4 \cdot 8} = \arccos \frac{-3 + 7 + 12}{4 \cdot 8} = \arccos \frac{1}{2} = \underline{\underline{60^\circ}}$$

Hier hat sich ein exakter Cosinuswert ergeben. Der Winkel beträgt folglich genau 60°.

Zur Erinnerung seien kurz die exakten Werte der Cosinusfunktion tabelliert:

Winkel φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

5.4 Orthogonalitätsnachweis – ein Leichtes mit dem Skalarprodukt!

Werfen wir nochmals einen genaueren Blick auf die Winkelberechnung. Multiplizieren wir die Gleichung (5.8) mit den beiden Beträgen a und b, so folgt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos\varphi \tag{5.9}$$

Da die Beträge a und b positiv sind, resultiert aus dieser Gleichung eine einfache Fallunterscheidung:

Spitze Winkel:	$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	$\Leftrightarrow$	$\cos\varphi > 0$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
Rechter Winkel:	$\varphi = 90^\circ$	$\Leftrightarrow$	$\cos\varphi = 0$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Stumpfe Winkel:	$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$	$\Leftrightarrow$	$\cos\varphi < 0$	$\Leftrightarrow$	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

Das Vorzeichen des Skalarproduktes sagt uns also ganz direkt, wie die beiden Vektoren tendentiell relativ zueinander ausgerichtet sind. Insbesondere der mittlere Fall ist hervorzuheben!

Orthogonalität zweier Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ stehen genau dann **senkrecht** *resp.* **orthogonal** *zueinander, wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ verschwindet:*

$$\vec{a} \perp \vec{b} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \tag{5.10}$$

Es ist also wirklich sehr einfach festzustellen, ob zwei Vektoren senkrecht zueinander stehen!

5.5 Das Skalarprodukt mit Einheitsvektoren

Wir betrachten zwei Einheitsvektoren $\vec{e}_a$ und $\vec{e}_b$. Da sie beide den Betrag 1 aufweisen, folgt für ihr Skalarprodukt aus Gleichung (5.9) sofort:

$$\vec{e}_a \cdot \vec{e}_b = \cos\varphi \tag{5.11}$$

Das Skalarprodukt zweier Einheitsvektoren liefert also direkt den Cosinus des Winkels zwischen den Einheitsvektoren! Diese Aussage ist übrigens bereits in der Winkelberechnungsgleichung (5.8) sichtbar enthalten, denn:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} = \frac{\vec{a}}{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b} = \vec{e}_a \cdot \vec{e}_b \qquad \text{mit} \quad \vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{a} \quad \text{und} \quad \vec{e}_b = \frac{\vec{b}}{b}$$

5.6 Hintergründige Eigenschaften des Skalarproduktes

Zum Kapitelende sollen weitere grundlegende Eigenschaften des Skalarproduktes benannt werden. Wir werden diese Eigenschaften resp. Rechenregeln für das Skalarprodukt selten ganz bewusst und explizit verwenden. Sie sind aber enorm wichtig für ein "geregeltes Verhalten" des Skalarprodukts, also dafür, dass wir damit relativ intuitiv umgehen dürfen und es schon seine Richtigkeit hat.

Kommutativität resp. Symmetrie: Das Skalarprodukt ist **symmetrisch** bezüglich der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Es ist also eine **kommutative** Operation:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \tag{5.12}$$

Dies folgt sofort aus der Kommutativität der Multiplikation zweier Zahlen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = b_x a_x + b_y a_y + b_z a_z = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

Betrag eines Vektors und positive Definitheit: Das Skalarprodukt eines Vektors $\vec{a}$ mit sich selber ergibt das Betragsquadrat des Vektors:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a^2 \tag{5.13}$$

Damit kann der **Betrag** eines Vektors neu via Skalarprodukt definiert werden:

$$a = |\vec{a}\,| := \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \tag{5.14}$$

Aus (5.13) folgt zudem die **positive Definitheit** des Skalarproduktes, dass also gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \qquad \text{für alle } \vec{a} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.15}$$

Gleich 0 wird das Skalarprodukt nur für den Nullvektor $\vec{0}$.

Betrag des Skalarproduktes: Aus Gleichung (5.9) folgt für den Betrag jedes Skalarproduktes:

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\,\right| = |a \cdot b \cdot \cos\varphi| = a \cdot b \cdot |\cos\varphi|$$

Der Cosinus ist allerdings eine beschränkte Funktion: $-1 \leq \cos\varphi \leq 1$. Also: $|\cos\varphi| \leq 1$. Und somit folgt für den Betrag des Skalarproduktes:

$$\left|\vec{a} \cdot \vec{b}\,\right| \leq a \cdot b \qquad \text{für alle } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \tag{5.16}$$

Der Betrag des Skalarprodukts zweier Vektoren ist niemals grösser als das Produkt der Beträge beider Vektoren.

Linearität resp. Bilinearität: Multipliziere ich einen der beiden Vektoren $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$, so wird dadurch auch der Wert des Skalarproduktes um den Faktor k vergrössert:

$$(k \cdot \vec{a}\,) \cdot \vec{b} = k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\,\right) \qquad \text{und} \qquad \vec{a} \cdot \left(k \cdot \vec{b}\,\right) = k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\,\right) \tag{5.17}$$

Diese Eigenschaft bezeichnet man als **Linearität** resp., weil sie für beide Argumente des Skalarproduktes gilt, als **Bilinearität** des Skalarproduktes. Sie folgt sofort aus dem Distributivgesetz für reelle Zahlen:

$$(k \cdot \vec{a}\,) \cdot \vec{b} = k \cdot a_x b_x + k \cdot a_y b_y + k \cdot a_z b_z = k \cdot (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) = k \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\,\right)$$

Distributivität: Für das Skalarprodukt gibt es ein **Distributivgesetz**. Für beliebige drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\,\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \tag{5.18}$$

Dies lässt sich auf das Distributivgesetz und die Kommutativität der Addition der reellen Zahlen zurückführen:

$$\begin{aligned}
\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\,\right) &= a_x(b_x + c_x) + a_y(b_y + c_y) + a_z(b_z + c_z) \\
&= a_x b_x + a_x c_x + a_y b_y + a_y c_y + a_z b_z + a_z c_z \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z + a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}
\end{aligned}$$

Kapitel 6

Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen

Bis anhin beschränkten sich unsere Betrachtungen im dreidimensionalen Raum im Wesentlichen auf einzelne Punkte und Verschiebungen zwischen diesen. Nun wollen wir beginnen ausgedehnte geometrische Orte, also Punktmengen zu studieren. Dies sind zunächst unendlich ausgedehnte **Geraden** und **Ebenen**, zu deren Beschreibung im Raum wir Vektoren verwenden werden. Dazu lernen wir eine ganz Schreibweise kennen und benutzen, die sich **Parameterdarstellung** nennt. Dabei erreichen wir alle Punkte der Gerade oder Ebene, indem wir einen resp. zwei reelle Parameter variieren.

6.1 Die Parameterdarstellung der Gerade im $\mathbb{R}^3$

Betrachten wir eine in beide Richtungen unendlich lange Gerade g im Raum (vgl. Abb. 6.1). Sie darf beliebig in unserem dreidimensionalen Koordinatensystem liegen.

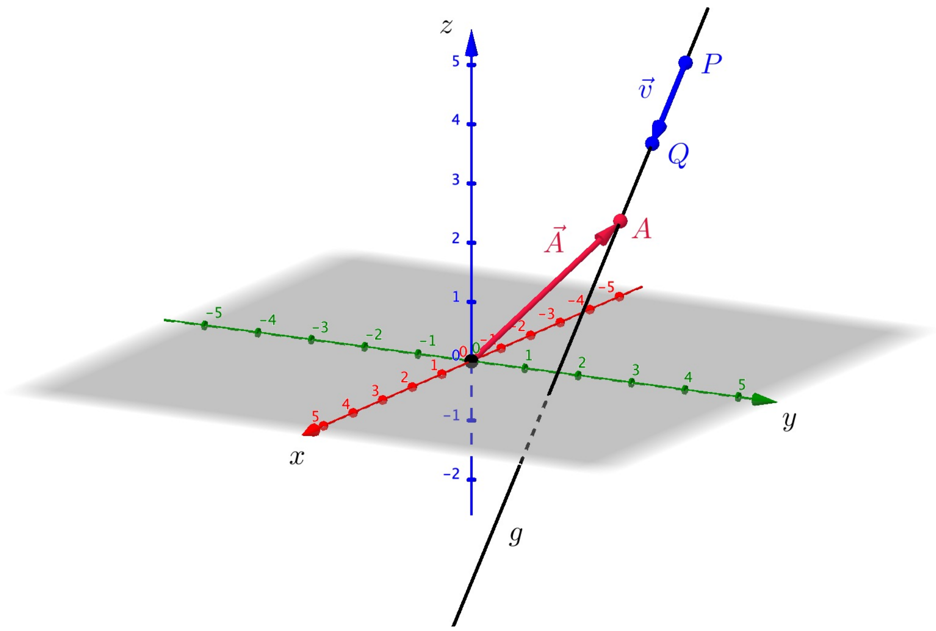


Abbildung 6.1: Vektoren zur Parameterdarstellung einer Geraden: Es braucht einen Aufpunkt A resp. einen Aufvektor $\vec{A}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$.

Richtungsvektor $\vec{v}$: Egal welche beiden Punkte P und Q auf der Gerade g wir herauspicken, der Vektor $\vec{v} = \vec{Q} - \vec{P}$ wird bis auf einen skalaren Faktor immer derselbe sein. Jeden solchen Vektor bezeichnen wir als **Richtungsvektor** $\vec{v}$ der Gerade g, denn jeder von ihnen beschreibt die Raumrichtung, längs der die Gerade ausgerichtet ist. Alle Richtungsvektoren zu einer bestimmten Gerade g sind kollinear!

Aufpunkt A und Aufvektor $\vec{A}$: Von jedem beliebigen Punkt A auf der Gerade lässt sich mittels eines Richtungsvektors $\vec{v}$ jeder beliebige andere Punkt P auf der Gerade erreichen, indem wir uns von A aus um ein bestimmtes Vielfaches $t \cdot \vec{v}$ mit $t \in \mathbb{R}$ verschieben.

Den Punkt A bezeichnen wir als **Aufpunkt**, den zugehörigen Ortsvektor $\vec{A}$ als **Aufvektor**. "Mittels $\vec{A}$ springen wir vom Ursprung aus **auf** die Gerade g."

Die Parameterdarstellung (PD) einer Gerade

Jede Gerade g im Raum kann durch eine **Parameterdarstellung** *– kurz:* **PD** *– beschrieben werden:*

$$\vec{P}_g(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \qquad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R} \tag{6.1}$$

Die PD enthält die Ortsvektoren $\vec{P}$ sämtlicher Punkte $P \in g$, wobei zu jedem P ein ganz bestimmter Wert des **Parameters** *t gehört.*

Zur Beschreibung einer Geraden im Raum wird also ein **Aufvektor** *$\vec{A}$ und ein* **Richtungsvektor** *$\vec{v}$ benötigt, mit denen sich die PD notieren lässt.*

Anmerkungen zur Parameterdarstellung der Gerade

Schreibweise $\vec{P}_g(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v}$: Bei gegebenen $\vec{A}$ und $\vec{v}$ fassen wir jeden Punkt $P \in g$ als Funktion des Parameters t auf. Daher schreiben wir $\vec{P}_g(t)$, wobei der Index g zum Ausdruck bringt, dass hier alle Punkte auf der Gerade g beschrieben werden.

Beispiel: Abb. 6.2 veranschaulicht, dass der Ortsvektor $\vec{R}$ zum Punkt $R \in g$ als Vektorsumme des Aufvektors $\vec{A}$ und eines Vielfachen des Richtungsvektors $\vec{v}$ geschrieben werden kann.

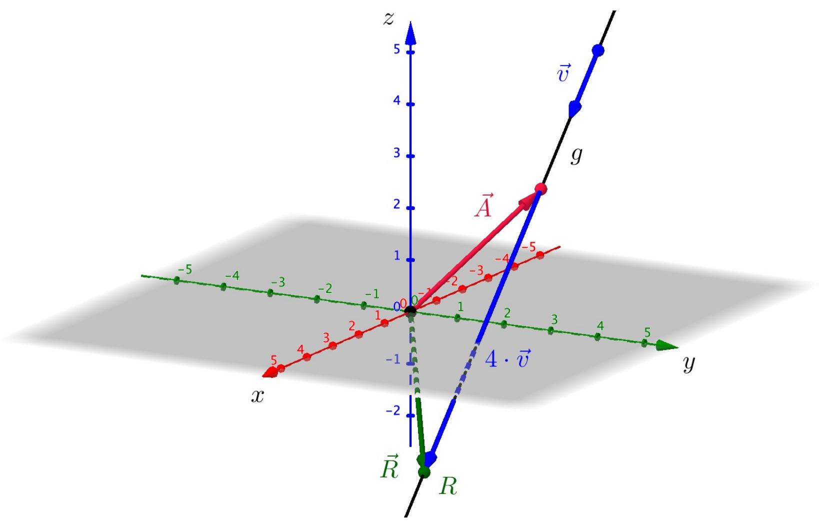


Abbildung 6.2: Zum Punkt R gehört in der PD zur Gerade g mit Aufvektor $\vec{A}$ und Richtungsvektor $\vec{v}$ der Parameterwert $t = 4$, denn es ist $\vec{R} = \vec{A} + 4 \cdot \vec{v}$.

Verschiedene Auf- und Richtungsvektoren: Zu jeder Gerade g gibt es beliebig viele Aufvektoren $\vec{A}$, denn grundsätzlich kann jeder Punkt $A \in g$ als Aufpunkt für die PD dienen.

Ebenso gibt es beliebig viele Richtungsvektoren $\vec{v}$, die ich zur Beschreibung von g verwenden kann. Diese sind alle kollinear zueinander.

Hier ein Beispiel von drei PDs, die allesamt dieselbe Gerade g beschreiben:

$$\vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{P}_g(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Bemerke: Die drei Parameter s, t und u haben bei einem bestimmten Punkt $P \in g$ in der Regel nicht dieselben Werte! So gehören zu $P(5,5,0)$ z.B. $s = 3$, $t = 0$ und $u = -\frac{2}{3}$.

Notation als Punktmenge: Eine Gerade ist eine Menge von Punkten oder Ortsvektoren, die wir im Beispiel von oben streng genommen etwa wie folgt notieren müssten:

$$g = \left\{ \vec{P} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Das ist aber gar umständlich, sodass wir es bei $\vec{P}_g(s) = \ldots$ von oben bewenden lassen – auch bei der Angabe einer Lösung, die aus einer Geraden besteht.

6.2 Geraden im $\mathbb{R}^2$

Bisherige Notationen: In der x-y-Ebene eines zweidimensionalen Koordinatensystems haben wir Geraden bis anhin durch Gleichungen oder lineare Funktionen beschrieben:

Geradengleichung		
implizit	explizit	Lineare Funktion
$ax + by = c$	$y = mx + q$	$g(x) = mx + q$

Dabei steht m für die Steigung und q für den y-Achsenabschnitt der Gerade. Die Parameter a, b und c in der impliziten Geradengleichung haben bis dato keine ganz direkte grafische Bedeutung, ausser dass klar ist, dass es sich für $c = 0$ um eine Ursprungsgerade handelt.

Richtungsvektor v und Steigung m: Die Richtung einer Gerade im $\mathbb{R}^2$ kann, wie wir bereits gesehen haben, auch durch einen Richtungsvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ beschrieben werden. Dabei gibt es eine einfache Umrechnung zwischen $\vec{v}$ und der Steigung m:

- Kenne ich die Steigung m einer Geraden, so kann ich sofort einen Richtungsvektor $\vec{v}$ dieser Gerade angeben:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

  In Worten: Gehe ich einen Schritt nach rechts, also in die positive x-Richtung, so verändert sich der y-Wert genau um den Steigungswert m.

- Umgekehrt kann aus jedem Richtungsvektor $\vec{v}$ auch leicht eine Steigung m gemacht werden:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{6.3}$$

  Rep.: Im Falle der Vertikalen, also für $\Delta x = 0$, gibt es gar keine explizite Form oder Funktionsgleichung für die Gerade.

N.B.: Zu jeder Gerade gibt es unendlich viele Richtungsvektoren, die allesamt kollinear sind.

Parameterdarstellung: Jeder Punkt A auf einer Gerade kann als Aufpunkt benutzt werden. Mit dem zugehörigen Aufvektor $\vec{A}$ und einem Richtungsvektor $\vec{v}$ lässt sich jede Gerade in Form einer Parameterdarstellung schreiben:

$$\vec{P}_g(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v} \tag{6.4}$$

Die PD für eine Gerade im $\mathbb{R}^2$ sieht also genau gleich aus wie diejenige in Gleichung (6.1) für eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ und funktioniert auch genau gleich. Nur geht es jetzt halt um Vektoren mit lediglich zwei Komponenten.

Geradengleichung im $\mathbb{R}^3$? Ob ich im $\mathbb{R}^2$ eher eine PD, eine Geradengleichung oder eine lineare Funktion zur Beschreibung einer Gerade verwende, hängt stark von der jeweiligen Anwendung ab. Ich benutze diejenige Darstellung, die mir gerade am praktischsten erscheint.

Wie sieht das im $\mathbb{R}^3$ aus? Müsste es dort nun nicht auch so etwas wie eine Geradengleichung oder eine lineare Funktion geben?

Antwort: Nein! Und das werden wir im Kapitel 7 auch noch besser ergründen und verstehen.

Im $\mathbb{R}^3$ ist die Parameterdarstellung in der Regel die einzige brauchbare Form zur Beschreibung einer Geraden!

6.3 Relative Lage von Geraden im Raum

Sobald ich mehrere Geraden betrachte, kann ich fragen, wie sie relativ zueinander stehen. Im $\mathbb{R}^3$ wollen wir **vier Fälle** voneinander unterscheiden:

- **Identität:** Die beiden Geraden liegen aufeinander, sind also identisch.
- **Echte Parallelität:** Die Geraden sind parallel, liegen aber nicht auf-, sondern nebeneinander.
- **Schneiden:** Die beiden Geraden schneiden sich in einem Punkt.
- **Windschief:** Die beiden Geraden sind weder parallel, noch schneiden sie sich.

  Dies ist der Normalfall, wenn wir zwei zufällig ausgewählte Geraden im $\mathbb{R}^3$ betrachten.

Sind die PDs zweier Geraden g und h gegeben, z.B durch $\vec{P}_g(s) = \vec{A} + s \cdot \vec{u}$ und $\vec{P}_h(t) = \vec{B} + t \cdot \vec{v}$, so lässt sich in zwei Schritten bestimmen, um welchen der vier Fälle es sich handelt:

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear?
Gibt es ein $k \in \mathbb{R}$ so, dass: $\quad \vec{u} = k \cdot \vec{v} \quad$?

JA → g und h sind **parallel!**

Liegt A auf h?
Gibt es ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass: $\quad \vec{A} = \vec{B} + t \cdot \vec{v} \quad$?

- JA → **identisch**
- NEIN → **echt parallel**

NEIN → g und h sind **nicht parallel!**

Gibt es einen gemeinsamen Punkt?
Gibt es $s, t \in \mathbb{R}$ so, dass: $\quad \vec{A} + s \cdot \vec{u} = \vec{B} + t \cdot \vec{v} \quad$?

- JA → **schneiden sich**
- NEIN → **windschief**

6.4 Die Parameterdarstellung der Ebene im $\mathbb{R}^3$

Unter einer **Ebene** E verstehen wir eine unendlich ausgedehnte, nicht gekrümmte Fläche im dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$. Alle Punkte einer Ebene lassen sich wiederum durch eine **Parameterdarstellung** beschreiben. Diese beinhaltet nun allerdings zwei Parameter, weil eine Ebene eben ein zweidimensionales Objekt ist (vgl. Abb. 6.3).

> **Die Parameterdarstellung (PD) einer Ebene**
>
> *Jede Ebene E im Raum kann durch eine* **Parameterdarstellung (PD)** *beschrieben werden:*
>
> $$\vec{P}_E(s,t) = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \qquad \text{mit} \quad s,t \in \mathbb{R} \tag{6.5}$$
>
> *Die PD enthält die Ortsvektoren $\vec{P}$ sämtlicher Punkte $P \in E$, wobei zu jedem P ein ganz bestimmtes Wertepaar (s,t) der beiden* **Parameter** *s und t gehört.*
>
> *Zur Beschreibung einer Ebene im Raum wird also ein* **Aufvektor** *$\vec{A}$ und zwei nicht-kollineare* **Richtungsvektoren** *$\vec{u}$ und $\vec{v}$ benötigt.*

Anmerkungen zur Parameterdarstellung der Gerade

Wie funktioniert die Ebenen-PD? In Gleichung (6.5) erkennen wir, dass wir mit dem Aufvektor $\vec{A}$ vom Ursprung zu einem Punkt $A \in E$ springen. Was dahinter hinzuaddiert wird, ist eine Linearkombination der beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. So erreichen wir jeden Punkt $P \in E$.

Ausblick: Die Parameterdarstellung der Ebene ist zwar einfach und anschaulich, gleichzeitig aber in der Anwendung eher ein bisschen unpraktisch. Im Kapitel 7 werden wir mit der **Ebenengleichung** eine geschicktere Beschreibung der Ebene kennenlernen. Aus diesem Grund werden wir auch nicht allzu viele Aufgaben zur Ebenen-PD bearbeiten.

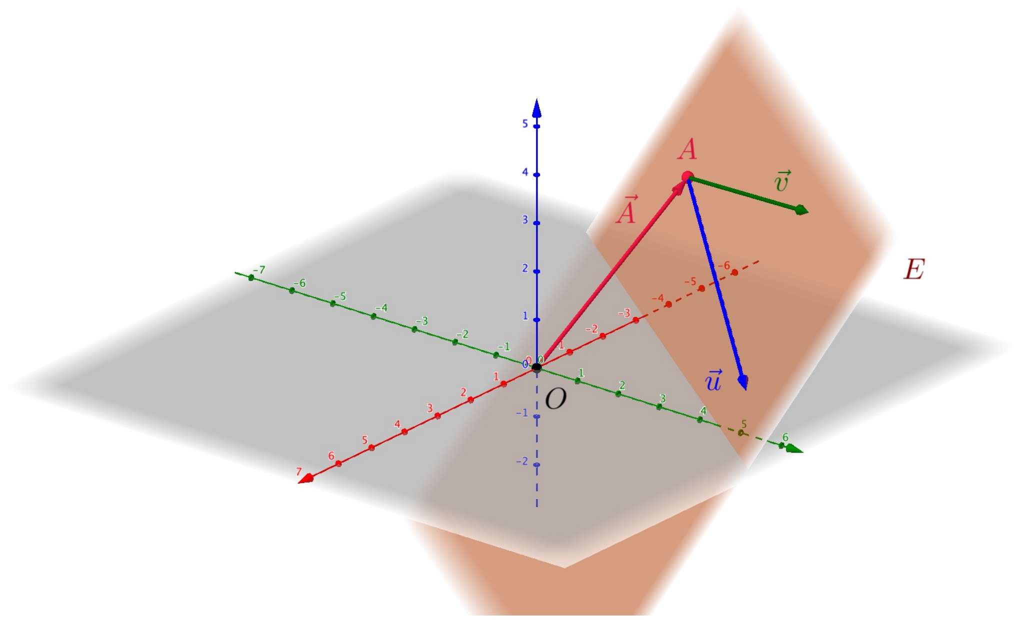


Abbildung 6.3: Zur Beschreibung einer Ebene E durch eine PD wird ein Aufpunkt A resp. ein Aufvektor $\vec{A}$ benötigt, der mich vom Ursprung auf die Ebene bringt. Mit einer Linearkombination zweier Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gelange ich von dort zu jedem beliebigen Punkt $P \in E$.

Kapitel 7

Die Koordinatengleichung der Ebene

Eine Punktmenge, die im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene bildet, beschreiben wir bis anhin durch eine Parameterdarstellung (vgl. Abschnitt 6.4). Dazu benötigen wir einen Aufpunkt A mit Ortsvektor $\vec{A}$ und zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.:

$$\vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{A} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \tag{7.1}$$

Diese Beschreibung einer Ebene ist zwar anschaulich sehr greifbar, rechnerisch aber oftmals eher unpraktisch. Wir wollen nun eine wesentlich besser handhabbare Beschreibung von Ebenen im $\mathbb{R}^3$ kennenlernen, die sogenannte **Koordinatengleichung (KG)**.

7.1 Der Normalenvektor $\vec{n}$ einer Ebene

Die **Ausrichtung** einer Ebene wird in der Parameterdarstellung (7.1) durch die zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ festgelegt. Jeder Vektor $\vec{w}$ parallel zur Ebene resp. "in dieser drin" lässt sich als Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ schreiben: $\vec{w} = r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$.

Betrachten wir Abb. 7.1. Der Vektor $\vec{n}$ soll senkrecht auf der Ebene E stehen. Als Konsequenz davon steht er auch orthogonal zu jedem Vektor $\vec{w}$ in E. Einen solchen Vektor $\vec{n}$ bezeichnen wir als **Normalenvektor** von E.

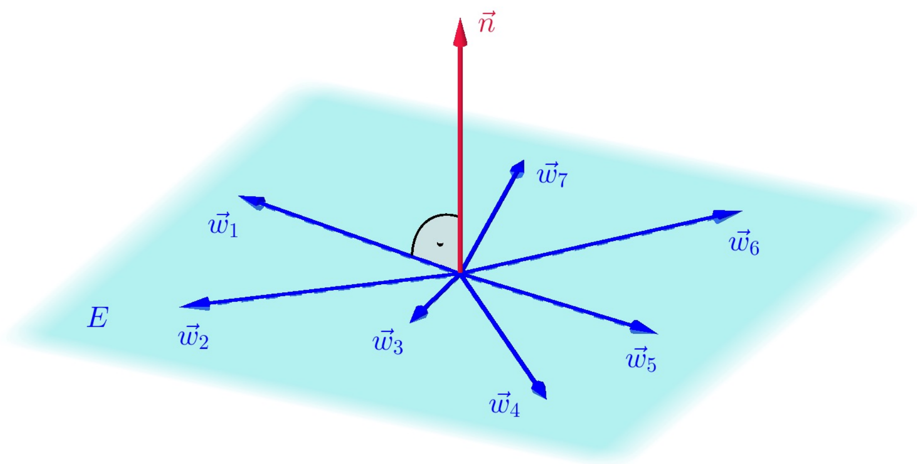


Abbildung 7.1: Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht zu allen Vektoren in der Ebene (hier nur für $\vec{w}_1$ explizit gezeigt) und legt so die Ausrichtung der Ebene fest.

Ganz anschaulich beschreibt somit auch der Normalenvektor $\vec{n}$ die Ausrichtung der Ebene. Anstatt zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ innerhalb der Ebene zu deklarieren, kann man genau so gut einen einzigen Normalenvektor $\vec{n}$ angeben, der senkrecht zur Ebene steht!

Alle Vektoren $\vec{w}$ parallel zur resp. innerhalb der Ebene E sind einerseits Linearkombinationen von $\vec{u}$ und $\vec{v}$, stehen andererseits aber auch senkrecht zu $\vec{n}$ – das Skalarprodukt $\vec{n}\cdot\vec{w}$ verschwindet. Das bedeutet, die folgenden beiden Vektormengen sind identisch, sofern der Normalenvektor $\vec{n}$ zur Ebene mit Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gehört:

$$\big\{\vec{w}\in\mathbb{R}^3 \,|\, \vec{w} = r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v} \text{ mit } r,s\in\mathbb{R}\big\} \;\equiv\; \big\{\vec{w}\in\mathbb{R}^3 \,|\, \vec{n}\cdot\vec{w}=0\big\}$$

Ab sofort werden wir die Ausrichtung einer Ebene fast ausschliesslich durch Verwendung eines Normalenvektors $\vec{n}$ beschreiben!

Der Normalenvektor $\vec{n}$ zu einer Ebene E steht stets senkrecht auf E und beschreibt so die Ausrichtung dieser Ebene im Raum.

Achtung! Der Normalenvektor $\vec{n}$ zu einer bestimmten Ebene E ist nicht eindeutig, aber alle Normalenvektoren zu E sind kollinear zueinander. Typischerweise möchten wir die Komponenten von $\vec{n}$ mit möglichst einfachen, ganzen Zahlen angeben!

Beispiel: Die Ebene E sei durch folgende Parameterdarstellung gegeben:

$$E:\ \vec{P}_E(r,s) = \vec{A}+r\cdot\vec{u}+s\cdot\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\-3\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\-2\end{pmatrix}$$

Ein Normalenvektor $\vec{n}$ zu E steht orthogonal zu allen Vektoren innerhalb von E, also auch zu den beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Daraus folgt:

$$\text{Ansatz:}\quad \vec{n} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{n} \overset{!}{=} 0\\ \vec{v}\cdot\vec{n} \overset{!}{=} 0\end{array}\right| \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{r}-2x+y+z=0\\ 7x+4y-2z=0\end{array}\right| \begin{array}{l}①\\②\end{array}$$

$$\Rightarrow\quad 2\cdot① + ②:\quad 3x+6y=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{x=-2y}$$

$$\Rightarrow\quad \text{in } ①:\quad -2\cdot(-2y)+y+z=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5y+z=0 \quad\Leftrightarrow\quad \underline{z=-5y}$$

Da der Normalenvektor $\vec{n}$ nicht eindeutig ist, hat sich auch keine eindeutige Lösung ergeben. Vielmehr sehen wir, dass wir durch unsere Auflösung die x- und die z-Komponente von $\vec{n}$ von der y-Komponente abhängig gemacht haben. Nun dürfen wir für y jede beliebige Zahl $\neq 0$ einsetzen. Insbesondere bietet sich $y=-1$ an, denn dadurch werden die Komponenten von $\vec{n}$ so einfach, wie es nur geht:

$$y=-1 \qquad\Rightarrow\qquad x=2 \quad\text{und}\quad z=5 \qquad\Rightarrow\qquad \underline{\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}}$$

Achtung Sprachverwirrung! Mittlerweile gibt es ein paar sehr ähnlich klingende Begriffe, die klar auseinanderzuhalten sind:

Orthogonal: Stehen zwei Vektoren senkrecht aufeinander, so sagen wir, sie stehen **orthogonal** zueinander.

Normal: Steht ein Vektor senkrecht auf einer Fläche, so sagen wir, er steht **normal** zu ihr. Deshalb sprechen wir auch vom **Normalenvektor** einer Ebene oder in der Physik von der **Normalkraft**, die stets senkrecht von der sie verursachenden stabilen Oberfläche weg zeigt.

Normiert: Hat ein Vektor die Länge resp. den Betrag 1, so sagen wir, er ist **normiert**.

7.2 Der Weg zur Koordinatengleichung

Vorgabe: Von einer Ebene E sei ein Punkt $A \in E$ und der Normalenvektor $\vec{n}$ bekannt:

$$A(A_x, A_y, A_z) \text{ resp. } \vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Fragestellung: *Gibt es eine Gleichung, durch die sich alle restlichen Punkte $P(x, y, z) \in E$ durch A und $\vec{n}$ beschreiben lassen?*

Bemerke: Die Lage von E im Raum ist durch die Angabe ihrer Ausrichtung (Normalenvektor $\vec{n}$) und eines Punktes in ihr (Aufpunkt A) eindeutig festgelegt. Die Frage nach einer Gleichung zur Beschreibung der Ebene aufgrund dieser Vorgaben ist also durchaus gerechtfertigt.

Aufspüren der Antwort: Wir betrachten Abb. 7.2. Darin bemerken wir: Egal welchen Punkt $P \in E$ wir auswählen, der Vektor $\overrightarrow{AP}$ vom Aufpunkt A zu P steht orthogonal zum Normalenvektor $\vec{n}$. Es gilt also:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \qquad \text{für alle } P \in E \tag{7.2}$$

Tatsächlich ist dies bereits die gesuchte Gleichung, denn darin tauchen neben dem Punkt P ja effektiv nur noch der Aufpunkt A und der Normalenvektor $\vec{n}$ auf! Allerdings wollen wir sie noch etwas anders aufschreiben:

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = \vec{n} \cdot \left(\vec{P} - \vec{A}\right) = \vec{n} \cdot \vec{P} - \vec{n} \cdot \vec{A} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{n} \cdot \vec{P} = \vec{n} \cdot \vec{A} \tag{7.3}$$

Wir werden diese Gleichung nicht so stehen lassen, aber in dieser Form (7.3) eignet sie sich bestens für die Veranschaulichung an einem Beispiel.

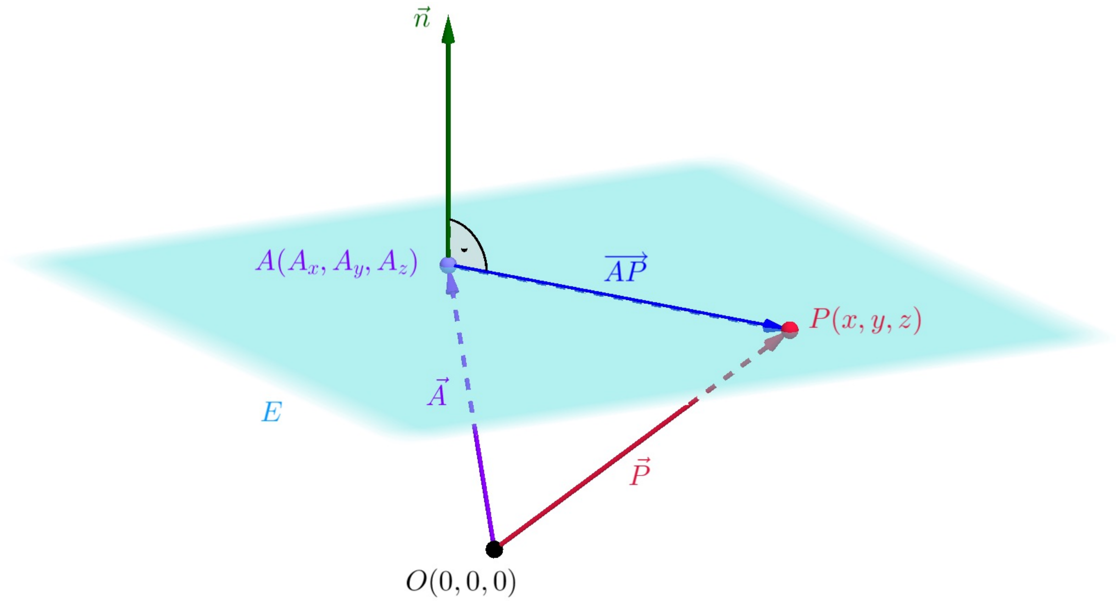


Abbildung 7.2: Grafik zur Herleitung der Koordinatengleichung. Der wichtigste Aspekt: Der Vektor $\overrightarrow{AP}$ steht senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$, egal welchen Punkt $P \in E$ wir betrachten.

Beispiel: Wir benutzen die Ebene aus dem Beispiel in Abschnitt 7.1, zu der wir bereits einen Normalenvektor $\vec{n}$ bestimmt haben. Es sind:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Notieren wir damit Gleichung (7.3):

$$\vec{n} \cdot \vec{P} = \vec{n} \cdot \vec{A} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x - y + 5z = 2 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + 5 \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{2x - y + 5z = 16}$$

Hier sehen wir zum ersten Mal die **Koordinatengleichung** zu einer bestimmten Ebene E vor uns. Das ist wirklich eine sehr schlanke Darstellung. Jeder Punkt $P(x, y, z) \in E$ erfüllt diese simple Gleichung! D.h., die Gleichung beschreibt die Ebene vollständig!

Allgemeines Resultat: Wir haben nun am Beispiel gesehen, wozu Gleichung (7.3) wird, wenn wir konkrete Werte für $\vec{n}$ und A einsetzen:

- Auf der linken Seite steht das Skalarprodukt des Normalenvektors $\vec{n}$ mit dem Ortsvektor $\vec{P}$ aller zu beschreibenden, also in der Ebene enthaltenen Punkte $P(x, y, z)$. Im Beispiel oben war das $\vec{n} \cdot \vec{P} = 2x - y + 5z$, allgemein geschrieben $\vec{n} \cdot \vec{P} = ax + by + cz$.
- Auf der rechten Gleichungsseite steht das Skalarprodukt aus Normalen- und Aufvektor, das einfach eine Zahl d ergibt: $\vec{n} \cdot \vec{A} = aA_x + bA_y + cA_z = d$.

Insgesamt ergibt sich aus (7.3) also eine Gleichung der Form:

$$ax + by + cz = d \qquad \text{mit} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \vec{n} \cdot \vec{A} \tag{7.4}$$

Wahlfreiheit des Aufpunktes: $2x - y + 5z = 16$ beschreibt offenbar alle Punkte $P(x, y, z)$, die zusammen eine ganz bestimmte Ebene E bilden. Dabei ist $d = 16$ auf der rechten Gleichungsseite durch das Einsetzen des Aufpunktes $A(4, -3, 1)$ entstanden.

Das ist im ersten Moment einigermassen irritierend: Wir berechnen den Gleichungsparameter d aus dem Aufpunkt A ($d = \vec{n} \cdot \vec{A}$), aber die Wahl dieses Aufpunktes A darf doch gar keine Rolle spielen! Jeder beliebige Punkt $A \in E$ muss doch als Aufpunkt dienen können! Ergäbe sich mit einem anderen Aufpunkt A nicht ein anderer Wert d, wodurch (7.4) dann offensichtlich eine andere Ebene beschreiben würde?

Die Antwort lautet: Nein! Jeder beliebige Punkt $A \in E$ darf zur Berechnung von $d = \vec{n} \cdot \vec{A}$ auf der rechten Gleichungsseite verwendet werden. Es ergibt sich immer derselbe Wert, im Beispiel oben $d = 16$. Das lässt sich auch leicht beweisen:

Seien $A, B \in E$. Dann gibt es einen Vektor $\overrightarrow{AB}$ so, dass $\vec{B} = \vec{A} + \overrightarrow{AB}$. Dieser Vektor $\overrightarrow{AB}$ von A nach B liegt in der Ebene E resp. parallel zu ihr. Daraus folgt aber sofort:

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \left(\vec{A} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{n} \cdot \vec{A} + \underbrace{\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}}_{=0} = \vec{n} \cdot \vec{A} \qquad \text{also:} \quad \vec{n} \cdot \vec{A} = \vec{n} \cdot \vec{B} \qquad \texttt{q.e.d.}$$

Das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}$ ergibt 0, weil $\overrightarrow{AB}$ ein Vektor innerhalb der Ebene E ist und daher der Normalenvektor $\vec{n}$ senkrecht dazu steht!

Im Prinzip haben wir mit dieser Überlegung nur nochmals verifiziert, dass (7.4) die Ebene E beschreibt. Es ist eben egal, welchen Punkt $P(x, y, z) \in E$ ich in die linke Gleichungsseite einsetze. Es muss sich immer derselbe Wert d ergeben!

7.3 Die Koordinatengleichung einer Ebene

Halten wir an dieser Stelle in Kürze fest, was wir eben herausgefunden haben:

Die Koordinatengleichung der Ebene

Alle Punkte $P(x, y, z)$ einer Ebene E erfüllen eine **Koordinatengleichung (KG)**

$$ax + by + cz = d \tag{7.5}$$

Dabei ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ein **Normalenvektor** *von E und der Parameter d ergibt sich durch Einsetzen eines beliebigen Punktes $P \in E$ in (7.5).*

Anmerkungen zur Koordinatengleichung der Ebene

- Die Koordinatengleichung (7.5) ist eine **lineare Gleichung** mit drei Unbekannten x, y und z und vier Parametern a, b, c und d. Eine solche Gleichung beschreibt eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

- Die KG zu einer bestimmten Ebene E ist nicht eindeutig, denn die ganze Gleichung (7.5) kann ja mit irgendeiner von Null verschiedenen Zahl $k \in \mathbb{R}$ skaliert werden. Z.B. beschreiben

  $$2x - y + 5z = 16 \qquad \text{und} \qquad x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}z = 8 \qquad \text{und} \qquad -10x + 5y - 25z = -80$$

  allesamt die gleiche Ebene.

- Dass in der KG die Komponenten a, b, c eines Normalenvektors $\vec{n}$ von E direkt sichtbar sind, macht sie quasi zu unserer Standardschreibweise für Ebenen, denn diese Eigenschaft ist ungemein praktisch.

- **Verwandtschaft zur Geradengleichung $ax + by = c$:** Erinnern wir uns an die lineare Gleichung mit zwei Unbekannten: $ax + by = c$. Diese Gleichung beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, also in einem zweidimensionalen Raum. Eine Gerade ist ein eindimensionales, unendlich ausgedehntes und nicht-gekrümmtes Objekt.

  Offenbar ist es so: Jede Gleichung, die im $\mathbb{R}^2$ für x und y aufgestellt wird, definiert einen eindimensionalen geometrischen Ort (eine Art von Kurve). Da es sich bei $ax + by = c$ um eine lineare Gleichung handelt, ist dieser geometrische Ort nicht-gekrümmt, also eine Gerade.[1]

  Ganz analog können wir im $\mathbb{R}^3$ nun sagen: Jede Gleichung für x, y und z beschreibt eine Fläche, also einen zweidimensionalen geometrischen Ort. Da die Koordinatengleichung (7.5) eine lineare Gleichung ist, beschreibt sie eine nicht-gekrümmte Fläche, also eine Ebene.[2]

  Ganz Verwegene dürfen an dieser Stelle gerne weiterdenken: Im vierdimensionalen Raum mit Punkten $P(w, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$ beschreibt die lineare Gleichung $aw + bx + cy + dz = e$ einen nicht-gekrümmten dreidimensionalen Raum. Das ist absolut folgerichtig, auch wenn wir uns bildlich unter dieser Aussage nicht mehr ganz direkt etwas vorstellen können.

[1] Hier ein Beispiel für die Gleichung einer gekrümmten Kurve im $\mathbb{R}^2$. Zum **Kreis** mit Radius r um den Mittelpunkt $M(x_M, y_M)$ gehört die Gleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$.

[2] Auch im $\mathbb{R}^3$ gibt es gekrümmte Flächen, z.B. eine **Sphäre**, also eine Kugeloberfläche. Zur Sphäre mit Radius r um den Mittelpunkt $M(x_M, y_M, z_M)$ gehört die Gleichung $(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$.

7.4 Der Schnittwinkel von Ebene und Gerade

Vorgabe: Eine Ebene E sei durch ihre Koordinatengleichung gegeben. Die durch $\vec{P}_g(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{v}$ definierte Gerade g durchsteche E in einem bestimmten Punkt S.

Definition des Schnittwinkels von Ebene und Gerade: Abb. 7.3 illustriert, welchen Winkel φ wir unter dem **Schnittwinkel** zwischen der Ebene E und der Gerade g verstehen wollen, nämlich den spitzen Winkel zwischen der Gerade g und ihrer "Schattenlinie" s auf der Ebene E, die entsteht, wenn man g längs der Richtung des Normalenvektors $\vec{n}$ auf E projiziert.

Winkelberechnung: Neben dem Richtungsvektor $\vec{v}$ von g kennen wir auch den Normalenvektor $\vec{n}$ von E, denn er ist ja direkt aus der Koordinatengleichung ablesbar.

Folglich lässt sich der Winkel $(90° - \varphi)$ mittels Gleichung (5.8) bestimmen:

$$\cos(90° - \varphi) = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{n \cdot v}$$

Nun ist aber $\cos(90° - \varphi) = \sin\varphi$, sodass wir für φ finden:

$$\sin\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{n \cdot v} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \arcsin\frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{n \cdot v} \tag{7.6}$$

Negatives Skalarprodukt: Mit (7.6) gibt es allerdings noch ein kleines Problem. Ist nämlich das Skalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ negativ, so entsteht ein negativer Winkel φ, denn die $\arcsin$-Funktion ist eine Abbildung von $[-1; 1]$ nach $[-90°; 90°]$.

Die Erklärung für diesen Fall liegt auf der Hand: $\vec{n}$ und $\vec{v}$ zeigen nicht auf dieselbe Seite von E. Ihr Zwischenwinkel ist folglich stumpf. Das lässt sich rasch korrigieren, indem wir z.B. den Normalenvektor mit -1 multiplizieren. Damit ändert auch das Skalarprodukt sein Vorzeichen und wir erhalten wirklich den spitzen Schnittwinkel zwischen E und g.

Dank dieser Erkenntnis lässt sich (7.6) wie folgt korrigieren und gilt nun in jedem Fall:

$$\varphi = \arcsin\frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}\,|}{n \cdot v} \tag{7.7}$$

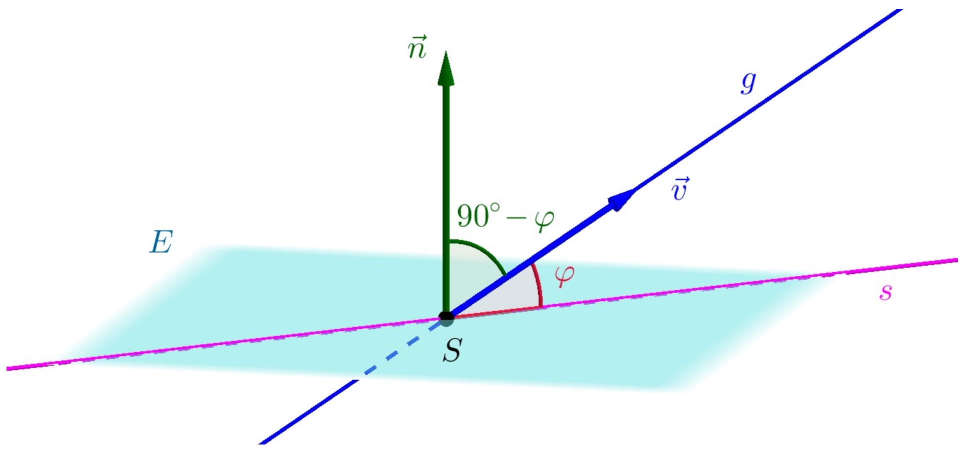


Abbildung 7.3: Der Schnittwinkel φ zwischen Ebene und Gerade.

7.5 Der Abstand zwischen Punkt und Ebene

Beispielvorgabe: Die Ebene E sei definiert durch $E: 2x - 2y + z = 3$. Weiter gegeben sei der Punkt $P(-1, 5, -3)$. Er liegt nicht auf E, denn $2 \cdot (-1) - 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-3) = -15 \neq 3$.

Fragestellung: *Wie weit ist der Punkt P von der Ebene E entfernt?*

Idee zur Beantwortung: Betrachten wir Abb. 7.4. Fällen wir von P aus das Lot auf die Ebene E, so ergibt sich der Fusspunkt $F \in E$. Der gesuchte Abstand d_{PE} zwischen dem Punkt P und der Ebene E entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$.

Weiter liegt $d_{PE} = \overline{PF}$ auf der Gerade g, die senkrecht auf der Ebene E steht, denn wir haben von P aus ja das Lot auf E gefällt. Der Normalenvektor $\vec{n}$ von E ist also ein Richtungsvektor von g.

Damit ist aber klar, wie sich F und somit dann auch $\overrightarrow{PF}$ bestimmen lässt:

i. Für g können wir eine PD mit Aufpunkt P und Richtungsvektor $\vec{n}$ ansetzen.
ii. Wir schneiden g mit E und bestimmen so den Fusspunkt F.
iii. Aus F erhalten wir den Vektor $\overrightarrow{PF}$ und somit auch dessen Betrag $\overline{PF}$, der dem gesuchten Abstand d_{PE} entspricht.

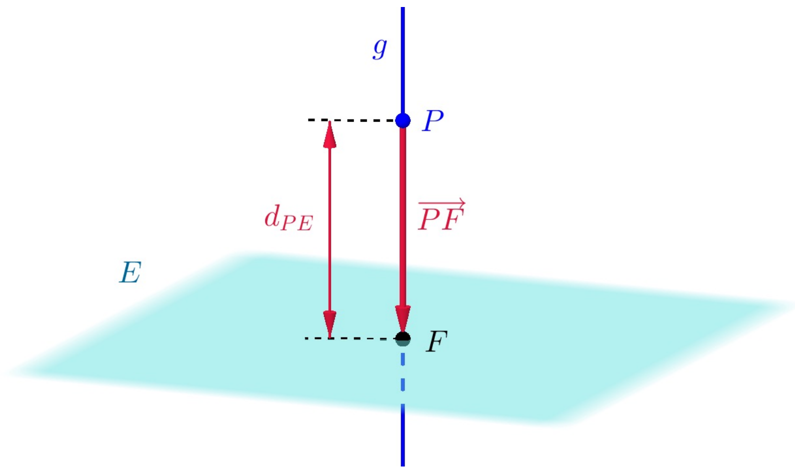


Abbildung 7.4: Der Abstand zwischen einem Punkt und einer Ebene.

Rechnerische Ausführung: Ich folge den oben deklarierten Schritten:

i. Als PD von g ergibt sich aus den Vorgaben:

$$g: \vec{R}_g(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ii. Diese PD fügen wir in die Koordinatengleichung von E ein und erhalten daraus für den zum Fusspunkt F gehörenden Parameterwert t (F = Schnittpunkt von g mit E):

$$2(-1+2t) - 2(5-2t) + 1(-3+t) = -2 + 4t - 10 + 4t - 3 + t = -15 + 9t \stackrel{!}{=} 3$$
$$\Leftrightarrow \quad 9t = 18 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = 2}$$

Daraus folgt für den Fusspunkt F:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{F(3,1,-1)}$$

iii. Und somit erhalten wir für $\overrightarrow{PF}$ und den Abstand d_{PE}:

$$\overrightarrow{PF} = \vec{F} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow \quad d_{PE} = \left|\overrightarrow{PF}\right| = 2 \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

Bemerke: Den Punkt F hätten wir für die Abstandsberechnung gar nicht zu bestimmen brauchen, denn der Vektor $\overrightarrow{PF}$ ist bereits durch $\overrightarrow{PF} = t \cdot \vec{n}$ gegeben.

Anstoss zur allgemeinen Lösung: Es wird sich als aufschlussreich erweisen den Abstand d_{PE} zwischen Punkt und Ebene ganz allgemein herzuleiten. Nun wissen wir ja, wie das im konkreten Fall geht, sodass uns die rein algebraische Lösung nicht mehr so abstrakt vorkommen wird.

Allgemeine Vorgabe: Die Ebene E und der Punkt P seien nun also allgemein gegeben durch $E:\ ax + by + cz = d$ und $P(x,y,z)$.

Allgemeine Lösung: Wiederum folge ich dem Rezept von oben:

i. Für die PD von g schreiben wir:

$$g:\ \vec{R}_g(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ii. Mit dieser PD gehen wir in die Koordinatengleichung von E und ermitteln den zu F gehörenden Parameterwert t:

$$a(x+at) + b(y+bt) + c(z+ct) = ax + by + cz + \left(a^2+b^2+c^2\right) t \overset{!}{=} d$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(a^2+b^2+c^2\right) t = d - ax - by - cz \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = \frac{d - ax - by - cz}{a^2+b^2+c^2}}$$

iii. Nun erhalten wir für den Vektor $\overrightarrow{PF}$ und daraus schliesslich für den Abstand d_{PE}:

$$\overrightarrow{PF} = t \cdot \vec{n} = \frac{d - ax - by - cz}{a^2+b^2+c^2} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d_{PE} = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \frac{|d - ax - by - cz|}{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2+c^2} = \underline{\underline{\frac{|d - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}}$$

In diesem allgemeinen Resultat steht $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ für den Betrag des in der Koordinatengleichung von E verwendeten Normalenvektors $\vec{n}$, also $n = |\vec{n}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Damit wollen wir unser Ergebnis oben auf der nächsten Seite gleich nochmals notieren.

Abstand eines Punktes von einer Ebene

Der Abstand d_{PE} des Punktes $P(x, y, z)$ von der Ebene $E: ax + by + cz = d$ ist gegeben durch:

$$d_{PE} = \frac{|d - ax - by - cz|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|d - ax - by - cz|}{n} \tag{7.8}$$

Dabei ist $n = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ der Betrag des in der Koordinatengleichung von E verwendeten Normalenvektors $\vec{n}$.

Erste Diskussion der allgemeinen Lösung: Wenn man über ein allgemeines Resultat zu einem bestimmten Problem verfügt, sollte man es nicht verpassen daraus Aussagen zum einen oder anderen Spezialfall abzuleiten:

- **Abstand der Ebene zum Ursprung:** Wählen wir für P den Ursprung $O(0, 0, 0)$, so vereinfacht sich (7.8) ganz wesentlich und gibt uns direkt an, wie weit die Ebene E vom Origo entfernt ist:

$$\text{Abstand der Ebene vom Ursprung:} \qquad d_{OE} = \frac{|d|}{n} \tag{7.9}$$

  Der Parameter d hat also ganz direkt mit dem Abstand der Ebene vom Ursprung zu tun. Eine Ebene durch den Ursprung hat stets $d = 0$.

- **Normierter Normalenvektor:** Haben wir in der Koordinatengleichung von E einen normierten Normalenvektor $\vec{n}$ verwendet ($n = 1$), so vereinfacht sich (7.8) ebenfalls:

$$\text{Abstand Punkt–Ebene bei normiertem } \vec{n}\text{:} \qquad d_{OE} = |d - ax - by - cz| \tag{7.10}$$

- **Abstand Ursprung–Ebene bei normiertem Normalenvektor:** Kombinieren wir die beiden obigen Fälle, so ergibt sich eine ganz besonders einfache Aussage zum Abstand der Ebene E vom Ursprung O:

$$\text{Abstand der Ebene vom Ursprung bei normiertem } \vec{n}\text{:} \qquad d_{OE} = |d| \tag{7.11}$$

  Verwenden wir also einen normierten Normalenvektor zur Beschreibung der Ebene, so hat der Parameter d nicht nur mit dem Abstand zum Ursprung zu tun, vielmehr ist sein Betrag gleich dem Abstand der Ebene zum Ursprung!

- **Unterscheidung der beiden Halbräume:** Die Betragsstriche in (7.8) sorgen lediglich dafür, dass der berechnete Abstand stets positiv herauskommt. Lassen wir die Betragsstriche weg, so können sich positive und negative Werte ergeben. Aus Gründen, die erst im nächsten Abschnitt ersichtlich werden, kehre ich noch die Vorzeichen um und definiere:

$$h_{PE} := \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{ax + by + cz - d}{n} \tag{7.12}$$

  Alle Punkte P, für die h_{PE} positiv herauskommt, liegen auf der einen Seite von E, alle mit negativem Wert auf der anderen – wir sagen: sie liegen in unterschiedlichen **Halbräumen**. Dabei besagt ein positiver Wert, dass man sich in die Richtung des Normalenvektors von der Ebene entfernen muss, um zu P zu gelangen. Für Punkte mit negativem h_{PE} muss man in die Gegenrichtung von $\vec{n}$ von E weggehen.

7.6 Die Hesse'sche Normalform der Koordinatengleichung

Die Koordinatengleichung $ax + by + cz = d$ beschreibt eine Menge aus Punkten $P(x, y, z)$, die zusammen eine Ebene E bilden. Wie jede Gleichung, so dürfen wir auch diese Koordinatengleichung mit Äquivalenzumformungen nach Belieben umstellen, ohne dass sich dabei etwas an der Lösungsmenge verändert. D.h., die umgeformte Gleichung wird immer noch dieselbe Ebene E beschreiben.

Auf diese Weise bringe ich die Koordinatengleichung auf eine andere Form:

$$ax + by + cz = d \quad \Leftrightarrow \quad ax + by + cz - d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{ax + by + cz - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$$

In dieser Form steht nun auf der linken Seite der Ausdruck für h_{PE} aus Gleichung (7.12)!

Wir können die Koordinatengleichung einer Ebene also in Kürze auf eine Form bringen, in der auf der einen Gleichungsseite ein Ausdruck für den Abstand eines Punktes $P(x, y, z)$ von der Ebene steht. Und natürlich muss dieser Abstand gleich Null sein, wenn der Punkt zur Ebene gehören soll!

Diese Gleichungsform beinhaltet demnach ganz unmittelbar sehr praktische Informationen über die Ebene, aber auch über die Lage anderer Punkte relativ zu ihr. Sie hat deshalb nach ihrem Erfinder einen eigenen Namen erhalten: **Hesse'sche Normalform**.

Hesse'sche Normalform (HNF) der Koordinatengleichung

Subtrahieren wir von der Koordinatengleichung $ax + by + cz = d$ einer Ebene E den Parameter d und dividieren anschliessend durch $n = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, so erhalten wir die **Hesse'sche Normalform (HNF)** *der Koordinatengleichung:*

$$\textbf{HNF:} \quad \underbrace{\frac{ax + by + cz - d}{n}}_{= h_{PE}} = 0 \tag{7.13}$$

Dabei steht die linke Seite h_{PE} für den mit einem Vorzeichen behafteten Abstand eines Punktes $P(x, y, z)$ von der Ebene E, wobei sich drei Fälle unterscheiden lassen:

$h_{PE} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ liegt auf der Seite von E, in die der Normalenvektor $\vec{n}$ zeigt

$h_{PE} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ liegt in der Ebene E

$h_{PE} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P$ liegt auf der Seite von E, in die der Vektor $-\vec{n}$ zeigt

Die zwei Seiten von E werden als **Halbräume** *bezeichnet.*

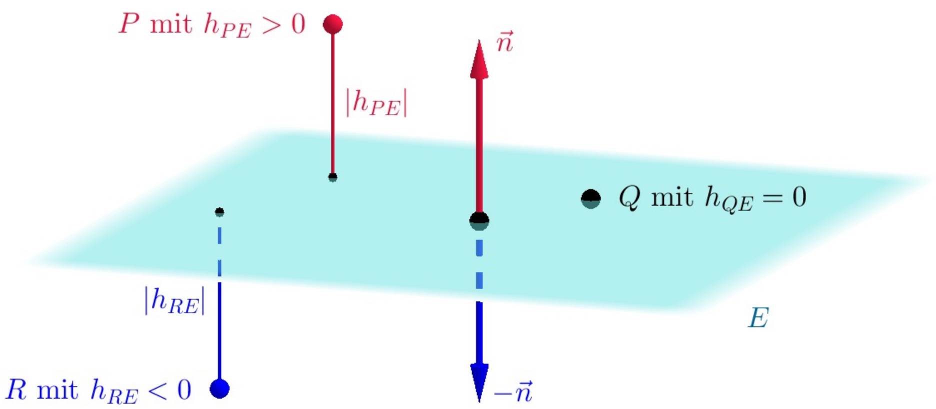


Abbildung 7.5: Lage von Punkten für verschiedene Vorzeichen von h_{PE}.

Kapitel 8

Dreireihige Determinanten

In diesem Kapitel lernen wir sogenannte dreireihige Determinanten zu berechnen und damit lineare 3x3-Gleichungssysteme zu lösen. Es ist ein Einschub, der zunächst nur bedingt mit Vektorgeometrie zu tun haben scheint. Wir werden erst im nächsten Kapitel erfahren, wo der direkte Zusammenhang besteht und wie man das sogenannte Vektorprodukt als dreireihige Determinante auffassen kann.

8.1 Rep.: Zweireihige Determinanten und 2x2-Gleichungssysteme

Satz: *Das lineare 2x2-Gleichungssystem*

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right|$$

hat genau dann genau eine Lösung, wenn seine Determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} := a_1b_2 - a_2b_1$$

verschieden von null ist. Sie lautet:

$$\underline{\underline{(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D} \right)}} \tag{8.1}$$

$$\textit{mit} \quad D_x := \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \quad \text{und} \quad D_y := \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Das wollen wir besser nochmals kurz beweisen...

Beweis: Wir lösen das Gleichungssystem mit dem vertrauten Additionsverfahren:

$$\left| \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} a_2 \cdot ①: \\ a_1 \cdot ②: \end{array} \left| \begin{array}{l} a_1a_2x + a_2b_1y = a_2c_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y = a_1c_2 \end{array} \right| \begin{array}{l} ③ \\ ④ \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad ④ - ③: \quad a_1b_2y - a_2b_1y = a_1c_2 - a_2c_1 \quad \Leftrightarrow \quad (a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1c_2 - a_2c_1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{D_y}{D} \qquad \text{und auf dieselbe Weise:} \quad x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{D_x}{D}$$

Diese Brüche existieren nur, falls $D = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. `q.e.d`

Zur Erinnerung: Die Lösung eines linearen 2x2-Gleichungssystems entspricht der Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden g und h in einem x-y-Koordinatensystem. Für $D \neq 0$ sind die beiden Geraden nicht parallel und haben somit einen eindeutigen Schnittpunkt.

Explizit: Wird g durch $a_1x + b_1y = c_1$ beschrieben, so ist $y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \equiv m_1x + q_1$. Die Steigung von g ist also $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$. Analog ist die Steigung von $h : a_2x + b_2y = c_2$ gegeben durch $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$. Wären die beiden Steigungen gleich, so wäre $m_1 = m_2$ resp. $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ und somit $a_1b_2 = a_2b_1$ resp. eben $D = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

8.2 Rechenregeln für zweireihige Determinanten

Bei der Berechnung zweireihiger Determinanten werden 2x2 Zahlen nach einer bestimmten Vorschrift miteinander zu einer neuen Zahl verrechnet:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc \tag{8.2}$$

Aus dieser Definition lassen sich ein paar fundamentale Rechenregeln für Determinanten ableiten. Diese werden später gleich oder zumindest ähnlich auch für dreireihige Determinanten gelten.

"Distributivität": Für alle $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a+b & c \\ d+e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \tag{8.3}$$

$$\begin{vmatrix} a & b+c \\ d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

$$\begin{vmatrix} a-b & c \\ d-e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \tag{8.5}$$

$$\begin{vmatrix} a & b-c \\ d & e-f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} \tag{8.6}$$

Die Beweise sind mittels (8.2) rasch erbracht:

$$\begin{vmatrix} a+b & c \\ d+e & f \end{vmatrix} = (a+b)f - (d+e)c = af - cd + bf - ce = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} \quad \text{etc.}$$

"Skalare Multiplikation": Für alle $a, b, c, d, k \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & kb \\ c & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{8.7}$$

$$\text{ebenso:} \quad \begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{8.8}$$

Die Beweise sind trivial. Ich verzichte darauf sie explizit zu notieren.

Zeilen- und Spaltenvertauschung: Für alle $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} \quad \text{ebenso:} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \tag{8.9}$$

8.3 Dreireihige Determinanten und lineare 3x3-Gleichungssysteme

Wir wollen nun auch für **lineare 3x3-Gleichungssysteme** (3x3-LGS) ein **Determinantenverfahren** entwickeln. Dieses soll auf dem Verfahren für 2x2-Gleichungssysteme und den Regeln für 2x2-Determinanten aufbauen.

Vorgabe: Wir betrachten das allgemeine lineare 3x3-Gleichungssystem:

$$\left|\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \qquad \text{mit} \quad a_1, \ldots, d_3 \in \mathbb{R} \tag{8.10}$$

Lösung: Beim Lösen von Gleichungssystemen ist es ein probates Mittel als Zwischenschritt die eine Unbekannte durch eine andere auszudrücken. Genau das machen wir nun, indem wir zunächst ② und ③ neu schreiben und als 2x2-LGS auffassen:

$$\left|\begin{array}{l} b_2y + c_2z = d_2 - a_2x \\ b_3y + c_3z = d_3 - a_3x \end{array}\right|$$

Sind y und z die Unbekannten dieses LGS, so können wir aufgrund des Determinantenverfahrens für 2x2-LGS gemäss (8.1) die Lösung direkt notieren:

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} d_2 - a_2x & c_2 \\ d_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} \qquad \text{und} \qquad z = \frac{D_z}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2 - a_2x \\ b_3 & d_3 - a_3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Dabei haben wir vorausgesetzt, dass $D = b_2c_3 - b_3c_2 \neq 0$ ist.

Nun setzen wir diese Lösungsausdrücke für y und z in ① ein und multiplizieren danach mit D:

$$a_1x + b_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} d_2 - a_2x & c_2 \\ d_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} + c_1 \cdot \frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2 - a_2x \\ b_3 & d_3 - a_3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = d_1$$

$$\Rightarrow \qquad a_1x \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \cdot \begin{vmatrix} d_2 - a_2x & c_2 \\ d_3 - a_3x & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & d_2 - a_2x \\ b_3 & d_3 - a_3x \end{vmatrix} = d_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Auf die Determinanten bei b_1 und c_1 wenden wir nun die "Distributivregeln" (8.5) und (8.6), sowie die Regel zur "skalaren Multiplikation" (8.7) an:

$$a_1x \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1x \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix} - c_1x \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

So kompliziert diese Gleichung aussieht, es handelt sich um eine ganz normale lineare Gleichung in der Unbekannten x. Schliesslich sind alle Determinanten einfach Zahlen. Wir lösen die Gleichung auf die übliche Art und Weise: Separieren, x ausklammern und am Ende durch die Klammer teilen. Hier zunächst die Separation und das Ausklammern:

$$a_1x \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1x \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1x \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x \cdot \left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \right) = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1 \begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

Bevor wir nun bald durch die Klammer teilen, wende ich noch die Regel (8.9) zur Spaltenvertauschung auf die Glieder mit Vorfaktor c_1 an:

$$x \cdot \left(a_1 \underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=A} - b_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=B} + c_1 \underbrace{\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}}_{=C} \right) = d_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Definition der dreireihigen Determinante: In obiger Gleichung steht nun links in der grossen Klammer ein Ausdruck, den wir auf der rechten Gleichungsseite sehr ähnlich wiederfinden. Diese Ausdrücke lassen sich als Ausrechnung einer **dreireihigen Determinante**, wenn wir diese wie folgt definieren:

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} := a \cdot \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \cdot \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \tag{8.11}$$

Die dreireihige Determinante wird also aufbauend auf der zweireihigen Determinante definiert. Die Einträge in der obersten Zeile werden je multipliziert mit einer zweireihigen Determinante, die sich aus den Einträgen in den unteren beiden Zeilen aus den anderen beiden Spalten ergibt. Wenn ich diese 2x2-Determinante so zusammenfüge, wie sie in der dreireihigen Determinante steht (ohne Spalten zu vertauschen), so ergibt sich beim zweiten Glied ein Minuszeichen.

Fortsetzung der Lösung: Unsere obige Gleichung kann nun kürzer geschrieben werden:

$$x \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=D} = \underbrace{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{=D_x}$$

Falls nun $D \neq 0$ ist, dürfen wir durch diese Determinante teilen und erhalten, wie schon beim 2x2-LGS:

$$x = \frac{D_x}{D} \tag{8.12}$$

Dabei entspricht D_x fast der Determinante D, nur dass wir die Spalte der ursprünglich bei x stehenden Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 durch die Konstantenspalte mit d_1, d_2 und d_3 ausgetauscht haben.

Bei dieser Herleitung haben wir nach x aufgelöst und dabei $A \neq 0$ vorausgesetzt. Hätten wir nach y aufgelöst, so wäre die Voraussetzung $B \neq 0$ nötig gewesen und bei z $C \neq 0$.

Wenn $D \neq 0$ ist, können nicht alle diese Unterdeterminanten A, B und C gleich null sein. Man kann deshalb für $D \neq 0$ **mindestens eine** Variable bestimmen.

Tatsächlich gilt aber (ohne Beweis): Ist $D \neq 0$, so können **alle Variablen** bestimmt werden und es gilt:

$$\underline{\underline{(x, y, z) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}, \frac{D_z}{D} \right)}}$$

Ausgeschriebene Determinante: Die Definition (8.11) kann man auch ganz ausschreiben. Wir erhalten sechs Glieder, drei positive und drei negative:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) \\ &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_3 - c_1b_2c_3 \end{aligned}$$

8.4 Rechenregeln für dreireihige Determinanten

Wie bei zweireihigen Determinanten (vgl. S. 44), so gibt es auch bei dreireihigen Determinanten relativ einfache Rechenregeln, von denen wir ein paar kurz festhalten wollen. Auf die Beweise verzichten wir. Sie sind mittels der Definition (8.11) und der rasch zu erledigen:

Berechnungsverfahren: Aufgrund der Ausmultiplikation auf der vorangegangenen Seite unten kann man sich weitere Berechnungsverfahren ausdenken, z.B.:

$$D = \begin{array}{|ccc|cc} \overset{+}{a_1} & \overset{+}{b_1} & \overset{+}{c_1} & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ \underset{-}{a_3} & \underset{-}{b_3} & \underset{-}{c_3} & a_3 & b_3 \end{array} \quad = \begin{array}{l} +a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 \\ -c_1 b_2 a_3 - a_1 c_2 b_3 - b_1 a_2 c_3 \end{array}$$

Letztlich spielt es keine Rolle, wie du eine dreireihige Determinante berechnest – Hauptsache du bist darin geübt und sicher!

"Distributivität": Für jede Determinante mit reellen Einträgen gilt:

$$\begin{vmatrix} a+b & c & d \\ e+f & g & h \\ i+j & k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ i & k & l \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{vmatrix} \qquad \text{etc.}$$

"Skalare Multiplikation: Wird eine Zeile oder eine Spalte mit einem Faktor k multipliziert, so auch der Wert der Determinante:

$$\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a & kb & c \\ d & ke & f \\ g & kh & i \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{etc.} \tag{8.13}$$

Zeilen- und Spaltenvertauschung: Bei der Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten wechselt die Determinante ihr Vorzeichen:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \quad \text{etc.} \tag{8.14}$$

Kapitel 9

Das Vektorprodukt

In diesem Kapitel wollen wir eine neue Vektoroperation, das sogenannte **Vektorprodukt** zweier Vektoren, kennenlernen. Wir benennen zuerst gewisse Eigenschaften, die dieses Vektorprodukt aufweisen soll und definieren es auf diese Weise. Anschliessend werden wir aus diesen Eigenschaften folgern, wie sich das Vektorprodukt ganz konkret berechnen lässt, damit es eben diese Eigenschaften erfüllt.

Dieses Vorgehen ist für uns eher ungewohnt. Bisher wurde – nicht nur in der Vektorgeometrie – eine neue Operation jeweils einfach durch ihre Rechenvorschrift vorgestellt und anschliessend wurde geschaut, welche Eigenschaften sie folglich aufweist. Letzte grosse Beispiele hierfür waren das Skalarprodukt zweier Vektoren oder die dreireihige Determinante bei einem 3x3-Gleichungssystem. Nun werden wir aber eben zuerst die Eigenschaften deklarieren, die unser Vektorprodukt auszeichnen sollen, und danach werden wir schauen, wie das Vektorprodukt folglich zu berechnen sein muss.

9.1 Die Eigenschaften des Vektorproduktes

Definition des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ aufgrund seiner Eigenschaften

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$.

Das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ *wird durch die folgenden vier Eigenschaften wohldefiniert:*

1. $\vec{a} \times \vec{b}$ *ist* **selber wieder ein Vektor** $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$*:*

   $$\textbf{Vektorprodukt:} \qquad \times : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{a}, \vec{b}) & \longmapsto & \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \end{array}$$

   Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so ergibt ihr Vektorprodukt den Nullvektor $\vec{0}$.

2. $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ *steht* **orthogonal zu jedem der beiden Eingabevektoren** $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$*:*

   $$\vec{c} \perp \vec{a} \qquad \text{und} \qquad \vec{c} \perp \vec{b}$$

3. *Der Betrag $c = |\vec{a} \times \vec{b}\,|$ ist gleich der* **Flächenzahl des Parallelogramms***, das durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.*

4. *Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ bilden in dieser Reihenfolge zusammen ein* **Rechtssystem**.

N.B.: Das Vektorprodukt wird oft auch als **Kreuzprodukt** bezeichnet, z.B. auch in `GeoGebra`, was sich im Symbol $\times$ widerspiegelt. In manchen Quellen wird als Zeichen aber auch ein $\wedge$ verwendet, damit keine Verwechslung mit allfälligen Buchstaben x entsteht.

Schrittweise Überlegungen zur Eindeutigkeit des Vektorproduktes

Wir wollen uns besser rasch überlegen, dass obige Eigenschaften ein eindeutiges Resultat für das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ definieren, denn das ist doch eine sinnvolle Forderung an eine neue Operation.

i. Die erste Eigenschaft im Kasten auf der vorangegangenen Seite ist noch keine grosse Einschränkung. Es wird nur definiert, welcher Art Resultat des Vektorproduktes sein soll, nämlich ein Vektor, also ein Objekt mit drei Komponenten.

ii. Die zweite Eigenschaft, also dass $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht, ist aber wirklich eine starke Forderung. Sofern $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nicht kollinear stehen, ist aber klar, dass es eine ganz eindeutige Richtung senkrecht zu den beiden Eingabevektoren gibt.

   Spezialfall: Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so verschwindet das Vektorprodukt resp. es ergibt sich der Nullvektor $\vec{0}$. Damit ist das Resultat für diesen Fall eindeutig festgelegt.

iii. Die dritte Eigenschaft legt die Länge des Resultatvektors $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ fest. Der Betrag $|\vec{a} \times \vec{b}\,|$ entspricht der Flächenzahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms. Mit ganz herkömmlicher Trigonometrie lässt sich rasch zeigen, dass diese Länge resp. Fläche durch

$$|\vec{c}\,| = |\vec{a} \times \vec{b}\,| = a \cdot b \cdot \sin\varphi \tag{9.1}$$

   gegeben ist, wobei φ für den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

   Für alle Vektorpaare $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt: $0° \leq \varphi \leq 180°$. Und somit auch: $0 \leq \sin\varphi \leq 1$.

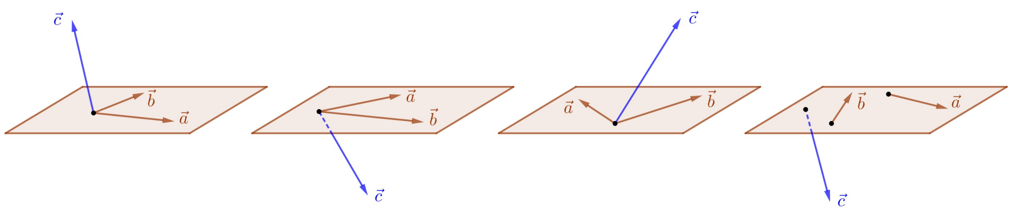
   Das passt auch bestens mit dem Spezialfall zusammen: Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so spannen sie kein Parallelogramm auf resp. dessen Fläche schrumpft auf 0 zusammen. Es ist also sinnvoll, dass das Resultat des Vektorproduktes in diesem Fall der Nullvektor $\vec{0}$ ist.

iv. Sind Richtung und Länge durch die zweite und die dritte Eigenschaft vorgegeben, so gäbe es für $\vec{a} \times \vec{b}$ immer noch zwei Möglichkeiten, nämlich zwei gleich lange Vektoren, die einander entgegengesetzt gerichtet sind. Welche dieser beiden Möglichkeiten das Resultat des Vektorproduktes sein soll, wird durch die vierte Eigenschaft festgelegt. Dazu definieren wir:

Orientierung eines räumlichen Dreibeins – Rechtssystem

Eine dreidimensionale Basis $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ *bildet ein sogenanntes* **Rechtssystem** *resp. ist* **positiv orientiert**, *wenn die drei Vektoren in der angegebenen Reihenfolge durch Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand dargestellt werden können.*

In den folgenden Figuren bildet das Vektortripel $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)$ *in den beiden Darstellungen links je ein Rechtssystem dar, in den anderen beiden nicht.*



Beim Vektorprodukt bilden $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}\,)$ ein Rechtssystem, wodurch die Blickrichtung von $\vec{a} \times \vec{b}$ festgelegt wird und schliesslich das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ eindeutig definiert ist.

Abb. 9.1 fasst alle Überlegungen in einer einzigen Grafik zusammen.

Aber wie lässt sich denn nun der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ganz konkret aus den Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen? Genau diese Frage wird im nächsten Abschnitt beantwortet.

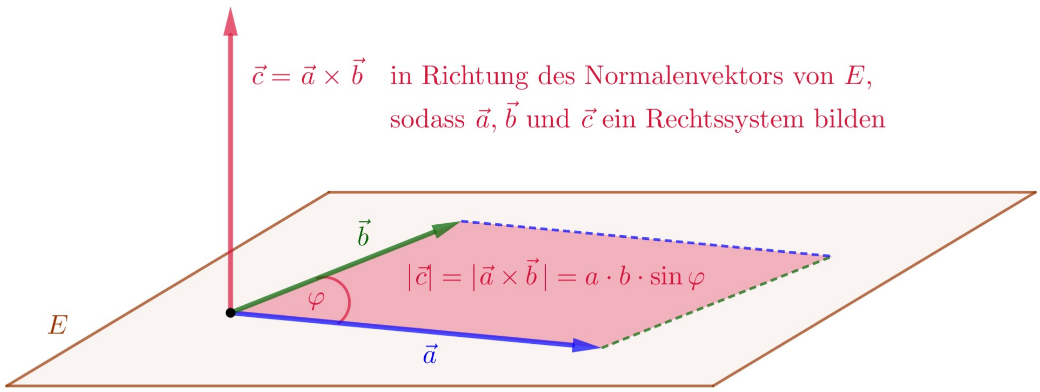


Abbildung 9.1: Das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ liefert als Resultat einen eindeutigen Vektor $\vec{c}$. Dieser steht senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$, ist also ein Normalenvektor der Ebene E, die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ enthält. Der Betrag von $\vec{c}$ entspricht der Flächenzahl des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms und die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem.

9.2 Die Berechnung des Vektorproduktes

Damit wir anschliessend ohne Unterbruch die konkrete Berechnung des Vektorproduktes herleiten können, empfehlen sich ein paar Überlegungen vorweg:

Nicht-Kommutativität: Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, kann das Vektorprodukt nicht kommutativ sein: $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$. Tatsächlich zeigt der Vektor $\vec{b} \times \vec{a}$ genau in die Gegenrichtung von $\vec{a}\times\vec{b}$, ist aber gleich lang wie dieser, denn am Parallelogramm, das von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, hat sich durch die Vertauschung der Reihenfolge nichts geändert. Deshalb muss gelten:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \tag{9.2}$$

Skalierung eines Eingabevektors: Multipliziere ich einen der beiden Eingabevektoren mit einem Skalar $k \in \mathbb{R}$, so ändere ich dadurch seine Länge, aber nicht seine Richtung. Die Fläche des Parallelogramms wird dadurch ebenfalls mit dem Faktor k skaliert, denn es wird ja einfach eine Seite mit diesem Faktor gestreckt. Folglich gilt für das Vektorprodukt:

$$(k \cdot \vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}\,) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}\,) \tag{9.3}$$

Distributivität: Schliesslich gilt für das Vektorprodukt ein Distributivgesetz:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}\,) = (\vec{a} \times \vec{b}\,) + (\vec{a} \times \vec{c}\,) \tag{9.4}$$

Auch dieses Distributivgesetz lässt sich unmittelbar aus den Eigenschaften des Vektorproduktes ableiten. Es geht um die Betrachtung von Parallelogrammflächen, wie Abb. 9.2 für drei komplanare Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ zeigt. Die Überlegung liesse sich auf eine nicht-komplanare Situation erweitern, worauf wir hier aber verzichten wollen.

Vektorprodukte der kartesischen Basisvektoren: Die Vektoren der **kartesischen Basis** (= Standardbasis) sind die Einheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$, die in die Richtungen der drei Koordinatenachsen zeigen. $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem, woraus folgt:

$$\begin{array}{ccc} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 & \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 & \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \end{array} \tag{9.5}$$

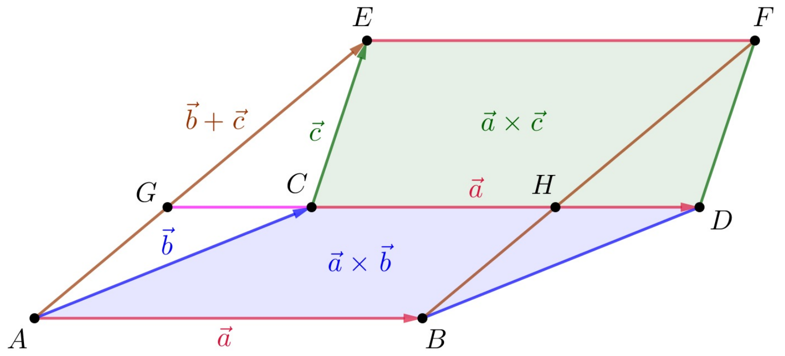


Abbildung 9.2: Die zwei Parallelogramme $ABDC$ und $CDFE$ haben zusammen eine Fläche, die genau derjenigen des Parallelogramms $ABFE$ entspricht. Folglich ist das Vektorprodukt distributiv: $(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$.

Das Vektorprodukt in Komponenten

Nun wollen wir die drei Komponenten von $\vec{a}\times\vec{b}$ durch diejenigen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ausdrücken.

Zunächst lassen sich zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ je als Linearkombination der kartesischen Basisvektoren ausdrücken:

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3 \qquad \text{und} \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3$$

Damit können wir jetzt für das Vektorprodukt schreiben:

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= \vec{a}\times(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3)\\
&\overset{(9.4)}{=} \vec{a}\times(b_1\cdot\vec{e}_1)+\vec{a}\times(b_2\cdot\vec{e}_2)+\vec{a}\times(b_3\cdot\vec{e}_3)\\
&\overset{(9.3)}{=} b_1\cdot(\vec{a}\times\vec{e}_1)+b_2\cdot(\vec{a}\times\vec{e}_2)+b_3\cdot(\vec{a}\times\vec{e}_3)\\
&= b_1\cdot\big((a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3)\times\vec{e}_1\big)\\
&\qquad\qquad +b_2\cdot\big((a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3)\times\vec{e}_2\big)\\
&\qquad\qquad\qquad +b_3\cdot\big((a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3)\times\vec{e}_3\big)\\
&\overset{(9.4)}{=} b_1\cdot\big(a_1\cdot\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{=\vec{0}}+a_2\cdot\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)}_{=-\vec{e}_3}+a_3\cdot\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)}_{=\vec{e}_2}\big)\\
&\qquad\qquad +b_2\cdot\big(a_1\cdot\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)}_{=\vec{e}_3}+a_2\cdot\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{=\vec{0}}+a_3\cdot\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{=-\vec{e}_1}\big)\\
&\qquad\qquad\qquad +b_3\cdot\big(a_1\cdot\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{=-\vec{e}_2}+a_2\cdot\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}_{=\vec{e}_1}+a_3\cdot\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)}_{=\vec{0}}\big)\\
&\overset{(9.5)}{=} -a_2b_1\cdot\vec{e}_3+a_3b_1\cdot\vec{e}_2+a_1b_2\cdot\vec{e}_3-a_3b_2\cdot\vec{e}_1-a_1b_3\cdot\vec{e}_2+a_2b_3\cdot\vec{e}_1\\
&= (a_2b_3-a_3b_2)\cdot\vec{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\cdot\vec{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\cdot\vec{e}_3\\
&= \begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Somit haben wir herausgefunden, wie das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus deren Komponenten berechnet wird.

Dieses Resultat wollen wir gleich nochmals festhalten und auch noch etwas anders schreiben:

Die Berechnung des Vektorproduktes aus den Vektorkomponenten

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

berechnet sich wie folgt aus den deren Komponenten:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{9.6}$$

Das Vektorprodukt kann also als Determinante aus den drei kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ und den Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgefasst werden.

Anmerkungen zur Berechnung des Vektorproduktes

- Die ausgeschriebene Determinante lautet zunächst:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

  In den Komponenten des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ stehen somit 2x2-Determinanten aus Komponenten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kollinear, so sind zwei Zeilen der Determinante bis auf einen Faktor k identisch und somit ergibt sich automatisch 0. Der Spezialfall kollinearer Vektoren ist also abgedeckt. Es gilt:

$$\vec{b} = k \cdot \vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \times \vec{b} = 0$$

- Mit dem Vektorprodukt haben wir eine weitere Möglichkeit zur Berechnung von Winkeln zwischen Vektoren erhalten. Für den Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$|\vec{a} \times \vec{b}\,| = a \cdot b \cdot \sin\varphi \quad \Leftrightarrow \quad \sin\varphi = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}\,|}{a \cdot b} \tag{9.7}$$

  Mit dieser Methode können wir allerdings nicht gut zwischen spitzen Winkeln und stumpfen Winkeln unterscheiden. Denn für $0° \leq \varphi \leq 90°$ durchläuft $\sin\varphi$ alle Wert von 0 bis 1, wie auch für $90° \leq \varphi \leq 180°$.

  Dennoch ist diese Winkelberechnungsmethode manchmal ganz praktisch.

- Mit Abstand am häufigsten werden wir das Vektorprodukt dazu verwenden einen Vektor $\vec{c}$ zu berechnen, der zu zwei gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht steht.

  So lässt sich z.B. aus der PD einer Ebene, die ja zwei Richtungsvektoren in der Ebene enthält, im Nu der Normalenvektor der Ebene und somit ihre KG bestimmen – viel schneller als bis anhin!

9.3 Das Spatprodukt

Definition: *Der* **Spat** *ist der Körper, der von drei Paaren paralleler Ebenen begrenzt wird.*

Quader: Der **Quader** ist der Spezialfall eines Spats mit lauter rechteckigen Seitenflächen.

Spat und Tetraeder: Jeder Spat lässt sich in sechs volumengleiche Tetraeder zerlegen.

Diese Aussage wird in Abb. 9.3 illustriert. Zunächst kann der Spat in zwei identische Prismen aufgeteilt werden. Diese wiederum lassen sich in je drei Tetraeder mit paarweise gleichen Grundflächen und Höhen zerlegen.

Spatvolumen: Das Volumen eines Spats ergibt sich aus dem Produkt von Grundfläche G und zugehöriger Höhe h (ohne Beweis):

$$V_{\text{Spat}} = G \cdot h$$

Gemäss voriger Überlegung (Abb. 9.3) entspricht das Spatvolumen aber auch dem Sechsfachen eines Tetraedervolumens. Daraus lässt sich herleiten, dass das Volumen eines Spats, der durch drei Kantenvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird, gegeben ist durch:

$$V_{\text{Spat}} = 6 \cdot V_{\text{Tetraeder}} = \left|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\right| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \right| \tag{9.8}$$

Das Spatvolumen ist also der Betrag des sogenannten **Spatprodukts** $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, das eine Aneinanderreihung von Vektor- und Skalarprodukt ist. Offenbar erhält man das Resultat dieses Spatproduktes direkt durch Berechnung der aus $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gebildeten Determinante (Beweis in den Übungen).

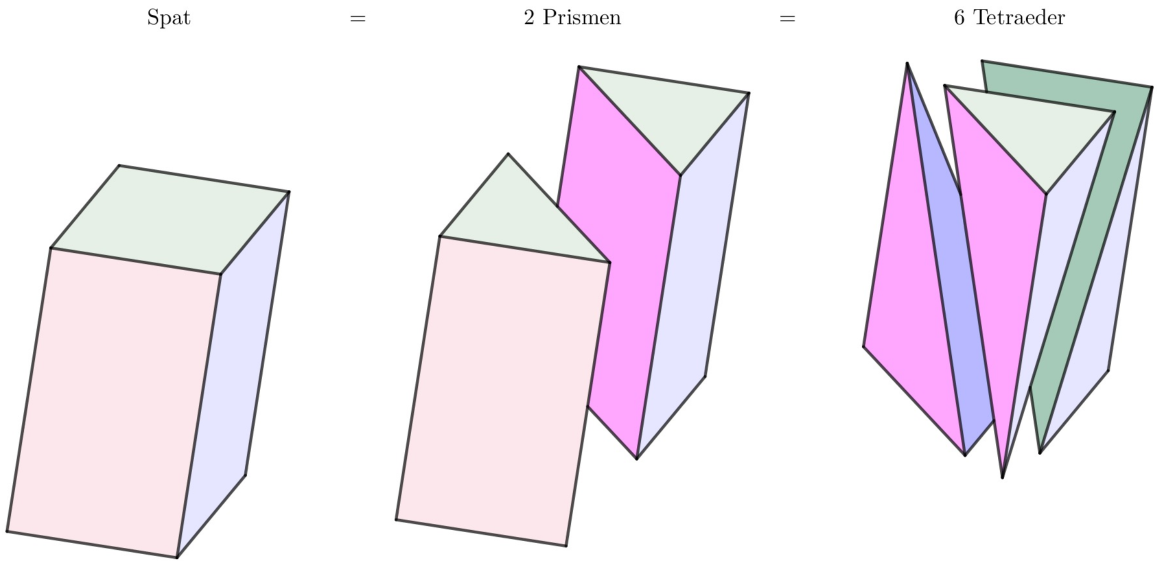


Abbildung 9.3: Ein Spat kann in zwei volumengleiche Prismen und jedes dieser Prismen in drei volumengleiche Tetraeder zerlegt werden. Der Spat besteht somit aus sechs volumengleichen Tetraedern.