

Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie X

1. (a) Der direkt ablesbare Normalenvektor zu $E: 3x - 4y + 2z = 17$ ist $\vec{n} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}}}$.

Natürlich ist auch jedes skalare Vielfache dieses Vektors eine valable Lösung.

- (b) Wir setzen jeden Punkt (x, y, z) links in die KG ein und überprüfen jeweils, ob sich tatsächlich 17 ergibt:

$$A: 3 \cdot 5 - 4 \cdot 3 + 2 \cdot 7 = 15 - 12 + 14 = 17 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A \in E}}$$

$$B: 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) = 6 + 16 - 6 = 16 \neq 17 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B \notin E}}$$

$$C: 3 \cdot \left(-\frac{5}{12}\right) - 4 \cdot \left(-\frac{35}{8}\right) + 2 \cdot \frac{3}{8} = -\frac{5}{4} + \frac{35}{2} + \frac{3}{4} = \frac{34}{2} = 17 \quad \checkmark \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C \in E}}$$

- (c) Wir setzen ein und finden:

$$A: 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 + 2z = 17 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{17 - 6 + 12}{2} = \underline{\underline{\frac{23}{2}}}$$

$$B: 3x - 4 \cdot (-4) + 2 \cdot (-3) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{17 - 16 + 6}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

- (d) Gesucht sind Koordinatentripel (x, y, z) , die die KG zu E erfüllen. Hier ein paar mögliche Lösungen:

$$\left(0, 0, \frac{17}{2}\right) \quad \left(0, -\frac{17}{4}, 0\right) \quad \left(\frac{17}{3}, 0, 0\right) \quad (5, 0, 1) \quad (1, 1, 9) \quad (-1, -5, 0) \quad \text{etc.}$$

2. Wir setzen die Parameterdarstellung der Gerade in die Koordinatengleichung der Ebene ein. Das sollten wir immer so machen, denn es ist die schnellste Schnittpunktermittlungsvariante zwischen Ebene und Gerade!

$$2(-1 + 2t) - 4(-2 + 4t) + 1(5 + 3t) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -9t + 11 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{t = \frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{P}_g\left(\frac{4}{3}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{8}{3} \\ -2 + \frac{16}{3} \\ 5 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{10}{3} \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{S\left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, 9\right)}}$$

3. (a) **Var. 1:** Zwei Richtungsvektoren von E sind:

$$\vec{u} = \frac{1}{2} \cdot \vec{AB} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = (-1) \cdot \vec{AC} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mit dem Vektorprodukt bestimmen wir aus den Richtungsvektoren einen Normalenvektor von E :

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit setzen wir die KG an und erhalten aus einem der drei Punkte den Parameter d :

$$3x - 5y + z = d \quad \Rightarrow \quad \text{mit } A: \quad d = 3 + 10 + 1 = 14 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E: 3x - 5y + z = 14}}$$

- (b) **Var. 2:** Wie in Variante 1 bestimmen wir zwei Richtungsvektoren und erhalten damit eine PD von E und somit ein Gleichungssystem für die Koordinaten x, y , und z aller Punkte $P(x, y, z)$ von E :

$$E: \vec{P}_E(r, s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r + s & \textcircled{1} \\ y = -2 + r + s & \textcircled{2} \\ z = 1 - r + 2s & \textcircled{3} \end{cases}$$

Nun eliminieren wir schrittweise die Parameter r und s , sodass schliesslich eine Gleichung in x, y und z entsteht:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{3}: & \quad \left| \begin{array}{l} x + 2z = 3 + 5s \\ y + z = -1 + 3s \end{array} \right| \textcircled{4} \\ \textcircled{2} + \textcircled{3}: & \quad \left| \begin{array}{l} y + z = -1 + 3s \\ z = 1 - r + 2s \end{array} \right| \textcircled{5} \\ \Rightarrow & \quad 3 \cdot \textcircled{5} - 5 \cdot \textcircled{4}: \quad 3x + 6z - 5y - 5z = 9 + 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E: 3x - 5y + z = 14}} \end{aligned}$$

- (c) **Var. 3:** Wir benutzen $E: ax + by + cz = d$ als Ansatz, in den wir die drei Punkte einsetzen und so ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem in a, b, c und d erhalten:

$$\begin{aligned} A: & \quad \left| \begin{array}{l} a - 2b + c = d \\ 5a - c = d \end{array} \right| \textcircled{1} \\ B: & \quad \left| \begin{array}{l} 5a - c = d \\ -3b - c = d \end{array} \right| \textcircled{2} \\ C: & \quad \left| \begin{array}{l} a - 2b + c = d \\ -3b - c = d \end{array} \right| \textcircled{3} \end{aligned}$$

Beim Lösen des Gleichungssystems haben wir einen Freiheitsgrad, d.h., wir dürfen einen von Null verschiedenen Parameter frei wählen. Das muss ja so sein, denn unsere Lösung ist eine KG, die sich beliebig mit einem Faktor multiplizieren lässt. Wir modifizieren damit quasi die Länge des Normalenvektors und nutzen diese Möglichkeit dafür, als Koeffizienten der Gleichung möglichst einfache Zahlen zu erhalten:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + \textcircled{2}: & \quad \left| \begin{array}{l} 6a - 2b = 2d \\ a - 5b = 2d \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3a - b = d \\ a = 5b + 2d \end{array} \right| \textcircled{4} \\ \textcircled{1} + \textcircled{3}: & \quad \left| \begin{array}{l} 6a - 2b = 2d \\ a - 5b = 2d \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3a - b = d \\ a = 5b + 2d \end{array} \right| \textcircled{5} \\ \Rightarrow & \quad \textcircled{5} \text{ in } \textcircled{4}: \quad 3(5b + 2d) - b = d \Leftrightarrow 14b = -5d \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -\frac{5}{14}d}} \end{aligned}$$

Bereits an dieser Stelle kann man erstmal d festlegen, z.B. $d = 14$, sodass $b = -5$ ist. Sollten sich mit dieser Wahl "unschöne" Zahlen für a und b ergeben, können wir später immer noch die ganze Gleichung mit einem Faktor skalieren.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{ in } \textcircled{4}: & \quad a = 5 \cdot (-5) + 2 \cdot 14 = -25 + 28 = \underline{\underline{3}} \\ \Rightarrow \text{ in } \textcircled{3}: & \quad c = -3b - d = -3 \cdot (-5) - 14 = 15 - 14 = \underline{\underline{1}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{E: 3x - 5y + z = 14}} \end{aligned}$$

- (d) **Folgerungen:** Halten wir folgende Beobachtungen fest:

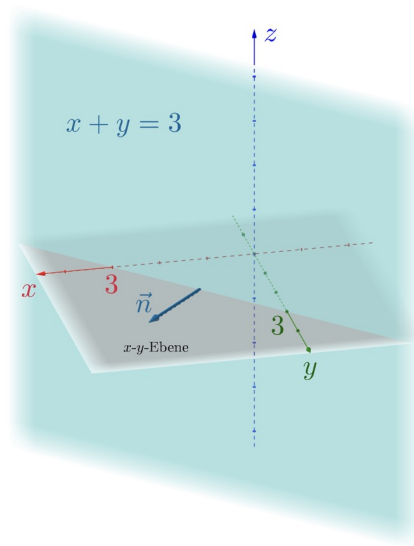
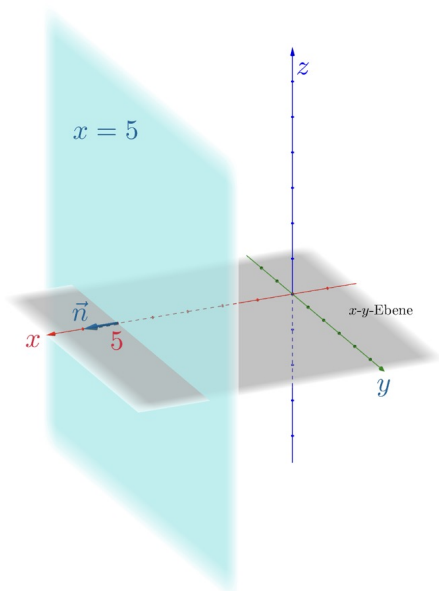
- Alle drei Verfahren funktionieren grundsätzlich tadellos und erzeugen dieselbe Koordinatengleichung.
- Das direkteste Verfahren, um aus drei Punkten die KG zu bestimmen, ist Var. 3: Wir setzen die Punkte in den KG-Ansatz $ax + by + cz = d$ ein und lösen das sich ergebende unterbestimmte Gleichungssystem.
- Eher umständlich sind die Varianten 1 und 2, weil zuerst zwei Richtungsvektoren bestimmt werden müssen und danach immer noch das eine oder andere zu tun bleibt. Dank des Vektorproduktes ist Var. 1 deutlich schneller als Var. 2.
- Stellen wir uns vor, wir müssten nicht aus drei Punkten, sondern ausgehend von einer Parameterdarstellung der Ebene die KG ermitteln, dann ist allerdings Var. 2 – PD als Gleichungssystem für x, y und z auffassen, PD-Parameter r und s eliminieren – ein sehr direkter Weg, den wir uns merken können!

4. Der Parameter d muss den Wert 0 aufweisen, sodass $(0, 0, 0)$ eine Lösung der Koordinatengleichung ist.

5. $E_1: x = 5$. Die Gleichung $x = 5$ kann explizit erweitert werden zu $1 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 5$, sodass der Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in Richtung } x\text{-Achse (!)}$$

gut erkennbar wird. E_1 ist also die Ebene senkrecht zur x -Achse auf Höhe der Stelle $x = 5$. Sie enthält ganz einfach alle Punkte mit x -Koordinate 5. Die Werte der y - und der z -Koordinaten spielen dabei keine Rolle. Unten links siehst du ein Bild dieser Ebene.



- $E_2: x + y = 3$. Hier lautet der Normalenvektor

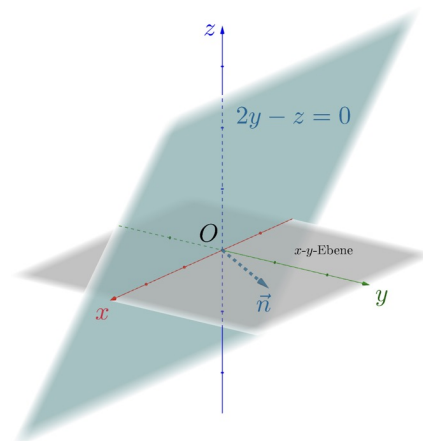
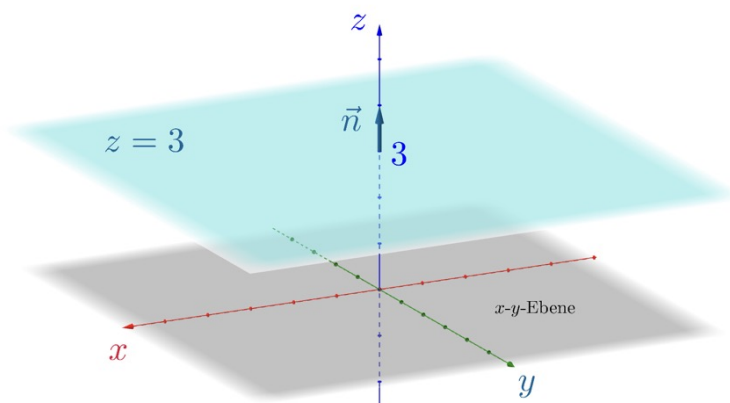
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

E_2 steht also senkrecht zur 1-1-Richtung in der x - y -Ebene und somit parallel zur z -Achse. Setzen wir $x = 0$, so ist $y = 3$, et vice versa. Daraus ergibt sich die Darstellung oben rechts.

- $E_3: z = 3$. Nun ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und E_3 steht parallel zur x - y -Ebene auf der Höhe $z = 3$. Alle Punkte mit dieser z -Koordinate gehören dazu. Die x - und y -Koordinaten sind egal. Das Bild dazu sehen wir unten links.



$E_4: 2y - z = 0$. Die Ebene E_4 verläuft offensichtlich durch den Ursprung $(0, 0, 0)$ – dieser Punkt löst die KG (!) – und der Normalenvektor ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

\vec{n} hat keine x -Komponente, sodass dieser Vektor parallel zur y - z -Ebene verläuft und die Ebene parallel zur x -Achse verläuft resp. diese enthält, weil ja auch der Ursprung ein Punkt der Ebene ist. Das zugehörige Bild sehen wir auf der vorangegangenen Seite unten rechts.

6. (a) Der Durchstoßpunkt D_x der x -Achse durch die Ebene $E: 3x - 5y + 2z = -10$ hat die Koordinaten $y = z = 0$. Analoges gilt für die anderen beiden Achsendurchstoßpunkte D_y und D_z . Es folgt also:

$$\underline{y = z = 0} \Rightarrow 3x = -10 \Rightarrow x = -\frac{10}{3} \Rightarrow \underline{\underline{D_x\left(-\frac{10}{3}, 0, 0\right)}}$$

$$\underline{x = z = 0} \Rightarrow -5y = -10 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow \underline{\underline{D_y(0, 2, 0)}}$$

$$\underline{x = y = 0} \Rightarrow 2z = -10 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow \underline{\underline{D_z(0, 0, -5)}}$$

- (b) Dank der Achsendurchstoßpunkte ist es nun sehr einfach eine PD von E anzugeben, z.B.:

$$\overrightarrow{D_x D_y} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{D_z D_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\vec{P}_E(r, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

7. (a) Ist eine Ebene in Form einer Koordinatengleichung und die andere als Parameterdarstellung angegeben, so empfiehlt es sich die PD in die KG einzusetzen:

$$\begin{aligned} E_2 \text{ in } E_1: \quad -6(1+r) + 4(2+2r-4s) + 3(-3r+3s) &= -12 \Leftrightarrow 2-7r-7s = -12 \\ \Leftrightarrow 7r+7s &= 14 \Leftrightarrow r+s = 2 \Leftrightarrow \underline{s = 2-r} \end{aligned}$$

Diese Abhängigkeit zwischen den beiden Parametern können wir in die PD der Ebene E_2 einsetzen, sodass direkt die PD der gesuchten Schnittgerade s entsteht:

$$\begin{aligned} s: \quad \vec{P}_g(r) &= \vec{P}_{E_2}(r, 2-r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + (2-r) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r+0(2-r) \\ 2+2r-4(2-r) \\ -3r+3(2-r) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+r \\ 2+2r-8+4r \\ -3r+6-3r \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}}} \end{aligned}$$

- (b) Bei zwei PDs gehen wir nach dem alten Muster vor: Gleichsetzen!

$$\vec{P}_{E_1}(r, s) \stackrel{!}{=} \vec{P}_{E_2}(t, u) \Rightarrow \begin{cases} 1+2r-6s = 7+5t+7u & \textcircled{1} \\ -r+7s = -1-7t-9u & \textcircled{2} \\ -5r+19s = 2-2t+2u & \textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2r-6s-5t-7u = 6 & \textcircled{1} \\ -r+7s+7t+9u = -1 & \textcircled{2} \\ -5r+19s+2t-2u = 2 & \textcircled{3} \end{cases}$$

In diesem unterbestimmten Gleichungssystem eliminieren wir zwei Parameter, sodass in der übrig bleibenden Gleichung ein Parameter, bei mir z.B. t , durch einen anderen (derselben Ebenen-PD!) ausgedrückt wird:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{2}: \quad \left| \begin{array}{l} 8s+9t+11u = 4 \\ 16s+33t+47u = -7 \end{array} \right| \textcircled{4} &\Rightarrow \textcircled{5} - 2 \cdot \textcircled{4}: \quad 15t+25u = -15 \Rightarrow \underline{\underline{t = -1 - \frac{5}{3}u}} \end{aligned}$$

Jetzt können wir den Ausdruck für t in die PD von E_2 zurück einsetzen. Diese hängt damit nur noch vom Parameter u ab und beschreibt somit keine Ebene mehr, sondern eben nur noch die Schnittgerade s . Mit etwas "Sortierung" erhalten wir so ziemlich direkt die gesuchte Schnittgeraden-PD:

$$\begin{aligned}\vec{P}_s(u) &= \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(-1 - \frac{5}{3}u\right) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 - 5 - \frac{25}{3}u + 7u \\ -1 + 7 + \frac{35}{3}u - 9u \\ 2 + 2 + \frac{10}{3}u + 2u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Den Richtungsvektor multiplizieren wir aus ästhetischen Gründen noch mit $\frac{3}{4}$:

$$s: \underline{\underline{\vec{P}_s(k) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}}$$

- (c) Ein Punkt $P(x, y, z)$, der auf der Schnittgerade der beiden Ebenen liegt, erfüllt beide KGs. D.h., er löst das folgende unterbestimmte Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2x + 6y + 3z = 12 & \textcircled{1} \\ x + y + z = 4 & \textcircled{2} \end{cases}$$

Das Gleichungssystem muss unterbestimmt sein, sonst ergäbe sich keine Schnittgerade (eindimensionaler geometrischer Ort). Wir drücken zuerst zwei Koordinaten durch die dritte aus:

$$\textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{2}: \quad 4y + z = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{z = 4 - 4y} \quad \Rightarrow \quad \text{in } \textcircled{2}: \quad x + y + 4 - 4y = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{x = 3y}$$

Nun können wir für y zwei Werte einsetzen und erhalten so zwei Punkte A und B auf der Schnittgerade. Wir bevorzugen möglichst einfache Koordinatenwerte:

$$A: \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{und} \quad z = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{A(0, 0, 4)}$$

$$B: \quad y = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \text{und} \quad z = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{B(3, 1, 0)}$$

Damit ergibt sich als PD der Schnittgerade s :

$$s: \underline{\underline{\vec{P}_s(t) = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}}}$$

Nachdiskussion von Aufgabe 7b: Ginge es nur darum, jeweils einen Richtungsvektor der Schnittgerade zu bestimmen, so wäre man mit dem Vektorprodukt deutlich schneller – man müsste lediglich das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren berechnen. (Im Falle einer Ebene, die durch eine PD gegeben ist, würde das bedeuten zuerst das Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren zu berechnen.)

Sollen wir hingegen eine PD der Schnittgerade bestimmen, so benötigen wir zwingend einen Aufpunkt, also einen der unendlich vielen Schnittpunkte. Bei dessen Bestimmung kommen wir nicht um das Lösen des jeweiligen Gleichungssystems herum. Da uns diese Lösung aber auch gleich den Richtungsvektor der Schnittgerade zu liefern vermag, ist die Verwendung des Vektorproduktes dann eben überflüssig.

8. (a) Wir verwenden Variante 2 aus Aufgabe 3:

$$\begin{aligned} \text{PD von } E &\Rightarrow \begin{cases} x = -5 + r + s & \textcircled{1} \\ y = 2 + 3r - s & \textcircled{2} \\ z = 4 - 4r - 2s & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{2}: \\ 2 \cdot \textcircled{1} + \textcircled{3}: \end{array} \begin{cases} x + y = -3 + 4r & \textcircled{4} \\ 2x + z = -6 - 2r & \textcircled{5} \end{cases} \\ &\Rightarrow \textcircled{4} + 2 \cdot \textcircled{5}: \Leftrightarrow \underline{\underline{E: 5x + y + 2z = -15}} \end{aligned}$$

Das ist wirklich ein rasches Verfahren um bei Ebenen die PD in eine KG umzuwandeln!

(b) Am einfachsten setzen wir $y = 0$ (\rightarrow Reduktion auf Punkte in der x - z -Ebene). Dadurch wird die KG aus (a) zu:

$$y = 0 \Rightarrow 5x + 2z = -15$$

Damit finden wir leicht zwei Punkte auf der Spurgeraden s_{xz} mit einfachen Koordinaten, z.B. $A(-3, 0, 0)$ und $B(-1, 0, -5)$. Dann ist die zugehörige PD rasch angegeben:

$$\vec{P}_{s_{xz}}(t) = \vec{A} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(c) Wir setzen die gegebene PD von g in die KG von E ein:

$$\begin{aligned} 5(7 + 2t) + 1(3 + t) + 2(-1 + 3t) &= -15 \Leftrightarrow 17t = -51 \Leftrightarrow \underline{t = -3} \\ \Rightarrow \vec{S} = \vec{P}_g(-3) &= \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 6 \\ 3 - 3 \\ -1 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(1, 0, -10)}} \end{aligned}$$

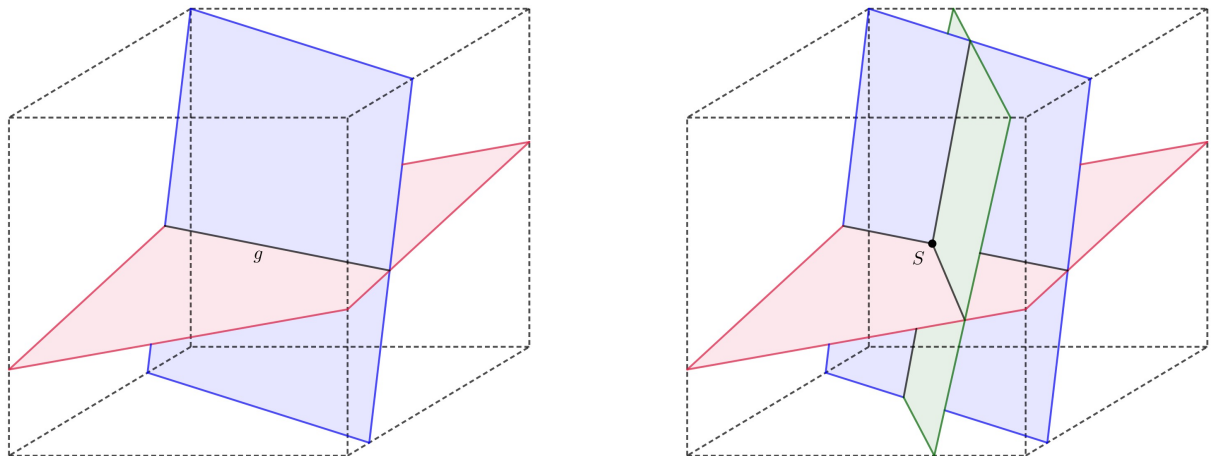
9. Wir setzen jeweils eine Koordinate gleich null und ermittle danach zwei einfache Punkte auf der Spurgerade, aus denen sich dann eine PD aufstellen lässt:

$$\begin{aligned} \underline{x=0} &\Rightarrow 5y - z = 15 \Rightarrow A(0, 3, 0) \text{ und } B(0, 0, -15) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 15 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{s_{yz}: \vec{P}_{s_{yz}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}}}} \\ \underline{y=0} &\Rightarrow -3x - z = 15 \Rightarrow A(-5, 0, 0) \text{ und } B(0, 0, -15) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{s_{xz}: \vec{P}_{s_{xz}}(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}}} \\ \underline{z=0} &\Rightarrow -3x + 5y = 15 \Rightarrow A(-5, 0, 0) \text{ und } B(0, 3, 0) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{s_{xy}: \vec{P}_{s_{xy}}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}} \end{aligned}$$

10. (a) Der Schnittpunkt löst alle drei KGs, also:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 2y + 3z = 6 & \textcircled{1} \\ 8x - 3y + 4z = 6 & \textcircled{2} \\ 9x + 5y - 7z = 6 & \textcircled{3} \end{cases} &\Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot \textcircled{1} - 2 \cdot \textcircled{2}: \\ 5 \cdot \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{3}: \end{array} \begin{cases} -13x + z = 6 & \textcircled{4} \\ 23x + z = 42 & \textcircled{5} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{5} - \textcircled{4}: 36x = 36 \\ &\Rightarrow \underline{x=1} \Rightarrow \underline{z=19} \Rightarrow \underline{y=26} \Rightarrow \underline{\underline{S(1, 26, 19)}} \end{aligned}$$

(b) Betrachte die folgenden Grafiken:



Zwei Ebenen im \mathbb{R}^3 haben im Allgemeinen eine Schnittgerade g , schneiden sich also in unendlich vielen, geradlinig aneinander gereihten Punkten.

Drei Ebenen im \mathbb{R}^3 weisen im Allgemeinen einen einzigen Schnittpunkt S auf.

11. Die KG zu E_1 ($3x + 4y = 36$) stellt keine Anforderungen an die z -Koordinate der Punkte. D.h., es handelt sich um eine Ebene, die parallel zur z -Achse verläuft resp. senkrecht auf der x - y -Ebene steht. Zu einem erlaubten Koordinatenpaar (x, y) in der x - y -Ebene kann jede beliebige z -Koordinate hinzugefügt werden.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der KG zu E_2 ($z = 4$). Es werden keine Bedingungen an die x - und die y -Koordinate gestellt. Sie sind frei wählbar. Nur die z -Koordinate muss gleich 4 sein. D.h., es handelt sich um eine Ebene parallel zur x - y -Ebene auf der Höhe $z = 4$.

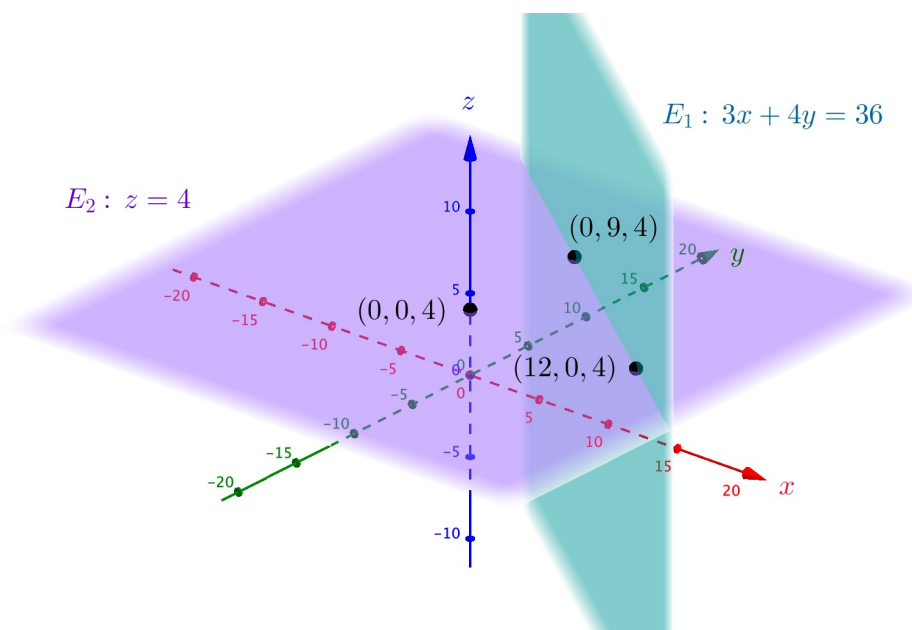
Jeder Punkt auf der Schnittgerade hat folglich die z -Koordinate 4 und aus der KG für E_1 erhalten wir z.B.:

$$\underline{x = 0} \Rightarrow 4y = 36 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow A(0, 9, 4)$$

$$\underline{y = 0} \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12 \Rightarrow B(12, 0, 4)$$

Damit folgt für die PD der Schnittgerade g :

$$g: \vec{P}_g(t) = \vec{A} + t \cdot \vec{AB} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$



12. (a) Schneiden bedeutet die PD der Gerade in die KG einzusetzen:

$$\begin{aligned} 10 \left(\frac{11}{10} + 0 \right) - 5 \left(-\frac{17}{5} + t \right) - 10 \left(\frac{7}{3} + t \right) &= -\frac{76}{3} \\ \Leftrightarrow 11 + 17 - 5t - \frac{70}{3} - 10t &= -\frac{76}{3} \quad \Leftrightarrow \frac{84 - 70}{3} - 15t = -\frac{76}{3} \\ \Leftrightarrow 14 - 45t &= -76 \quad \Leftrightarrow 45t = 90 \quad \Leftrightarrow \underline{t = 2} \end{aligned}$$

Damit folgt für den Schnittpunkt:

$$\vec{S} = \vec{P}_g(2) = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{17}{5} + 2 \\ \frac{7}{3} + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{7}{5} \\ \frac{13}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S \left(\frac{11}{10}, -\frac{7}{5}, \frac{13}{3} \right)}}$$

Der Schnittwinkel ergibt sich aus Normalenvektor von E und Richtungsvektor von g :

$$\arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{n \cdot v} = \arcsin \frac{|0 - 5 - 10|}{\sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \arcsin \frac{15}{15\sqrt{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \underline{\underline{45^\circ}}$$

- (b) Wir gehen genau gleich vorzugehen:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{11}{10} + 0 \right) + 1 \left(-\frac{17}{5} + t \right) - 1 \left(\frac{7}{3} + t \right) &= -\frac{14}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{11}{5} - \frac{17}{5} + t - \frac{7}{3} - t &= -\frac{14}{3} \quad \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \neq -\frac{7}{3} \end{aligned}$$

Offensichtlich gibt es keinen Schnittpunkt. Das kann nur bedeuten, die Gerade g verläuft parallel zur Ebene E_2 und liegt nicht in ihr drin.

Diese Parallelität lässt sich auch beim Versuch der Schnittwinkelbestimmung feststellen:

$$\arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{n \cdot v} = \arcsin \frac{|0 + 1 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \arcsin 0 = 0^\circ$$

Der "Schnittwinkel" von 0° bedeutet, die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

13. Der Schnittpunkt auf der y -Achse hat die Koordinaten $(0, y, 0)$. Dies setzen wir in die KG der Ebene E ein und erhalten sofort:

$$0 - 4y + 0 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad y = -3 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{(0, -3, 0)}}$$

Die y -Achse hat die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit folgt für den Schnittwinkel:

$$\arcsin \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}|}{n \cdot v} = \arcsin \frac{|-4|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 7^2} \cdot 1} = \arcsin \frac{4}{9} \approx \underline{\underline{26.4^\circ}}$$