Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE X: Erste Aufgaben zur Koordinatengleichung der Ebene

Klasse 155c / AGe

1. Gegeben sei die Ebene $E: 3x - 4y + 2z = 17$.
   (a) Gib einen Normalenvektor zu E an.
   (b) Beurteile, ob die Punkte $A(5,3,7)$, $B(2,-4,-3)$ und $C(-\frac{5}{12}, -\frac{35}{8}, \frac{3}{8})$ auf E liegen.
   (c) Komplettiere die Koordinaten von $A(2,3,z)$ und $B(x,-4,-3)$ in E.
   (d) Bestimme zwei weitere Punkte auf E.

2. Schneide $g: \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $E: 2x - 4y + z = -1$.

3. Die drei Punkte $A(1,-2,1)$, $B(5,0,-1)$ und $C(0,-3,-1)$ liegen alle in der Ebene E.
   Gib eine Koordinatengleichung (KG) von E an!
   In dieser Aufgabe schaust du unter (a), (b) und (c) drei verschiedene Varianten zur KG-Bestimmung an, um schliesslich zu beurteilen, welche Vorgehensweise die beste ist.
   (a) **Var. 1: Normalenvektor $\vec{n}$ aus zwei Richtungsvektoren von E bestimmen**
      i. Benutze A, B und C um zwei Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ von E anzugeben.
      ii. Ermittle den Normalenvektor $\vec{n}$ von E, indem du ihr Vektorprodukt berechnest.
      iii. Stelle mit $\vec{n}$ die KG auf und ermittle den fehlenden Parameter d, indem du einen Punkt einsetzt.
   (b) **Var. 2: PD von E als Gleichungssystem auffassen und darin die PD-Parameter eliminieren**
      i. Benutze A, B und C, um eine PD $\vec{P}_E(r,s) = \ldots$ von E aufzustellen.
      ii. Notiere die PD als Gleichungssystem mit drei Gleichungen für die Koordinaten von $P \in E$:
      $$\left| \begin{array}{l} x = \ldots \\ y = \ldots \\ z = \ldots \end{array} \right|$$
      iii. Eliminiere in zwei Schritten die beiden Parameter r und s, sodass schliesslich nur noch eine Gleichung in x, y und z da steht, die sich in die Form der KG bringen lässt.
   (c) **Var. 3: Ein Gleichungssystem für die Parameter der KG ansetzen**
      i. Setze A, B und C in den KG-Ansatz $ax + by + cz = d$ ein, sodass ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den vier Unbekannten a, b, c und d entsteht.
      ii. Löse dieses unterbestimmte Gleichungssystem nach a, b oder c auf und wähle dann einen passenden Wert für d, sodass möglichst einfache Zahlen entstehen.
      iii. Setze zurück ein und finde so die Werte der anderen beiden Parameter.
   (d) **Folgerungen:** Was ist nun dein Fazit aus dem Vergleich der drei Varianten?
      - Welche Vorgehensweise ist die schnellste/einfachste?
      - Welche Methode empfiehlt sich gar nicht (zu kompliziert/umständlich)?
      - Kann man von einer Methode vielleicht einen Teil für eine andere Art von Aufgabe gebrauchen?

4. Welche Eigenschaft hat die KG einer Ebene durch den Ursprung?

5. Überlege dir, wie die durch die folgenden KGs gegebenen Ebenen im Koordinatensystem liegen:

$$E_1 : x = 5 \;, \quad E_2 : x + y = 3 \;, \quad E_3 : z = 3 \quad \text{und} \quad E_4 : 2y - z = 0 \quad .$$

6. Gegeben sei die Ebene $E : 3x - 5y + 2z = -10$.

   (a) Gib die Achsendurchstosspunkte von E an.

   (b) Gib eine Parameterdarstellung von E an.

7. Schneide jeweils die Ebenen E_1 und E_2 miteinander – bestimme also die PD der Schnittgerade. Wie geht man bei den jeweiligen Vorgaben *am geschicktesten* vor?

   (a) $E_1 : -6x + 4y + 3z = -12$ und $E_2 : \vec{P}_{E_2}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{P}_{E_1}(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix}$ und $\vec{P}_{E_2}(t,u) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (c) $E_1 : 2x + 6y + 3z = 12$ und $E_2 : x + y + z = 4$.

8. Gegeben sei die Ebene $E : \vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   (a) KG von E? (**Tipp:** Variante 2 aus Aufgabe 3.(b)!)

   (b) Gib die **Spur** s_{xz} dieser Ebene an.
   Hinweis: Die **Spurgeraden** oder einfach **Spuren** einer Ebene sind die Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen. Spur s_{xy} = Schnitt mit der x-y-Ebene, etc.

   (c) Schneide E mit $g : \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Benutze dazu das Resultat aus (a).

9. Gib alle Spurgeraden von $E : -3x + 5y - z = 15$ an.

10. Es seien $E_1 : x - 2y + 3z = 6$, $E_2 : 8x - 3y + 4z = 6$ und $E_3 : 9x + 5y - 7z = 6$.

    (a) Bestimme $E_1 \cap E_2 \cap E_3$.

    (b) Wie viele Schnittpunkte haben zwei/drei Ebenen in allgemeiner Lage.

11. Ermittle eine PD der Schnittgerade von $E_1 : 3x + 4y = 36$ mit $E_2 : z = 4$ und erstelle eine einigermassen exakte Skizze der Situation.

12. Gegeben seien die Ebene $E_1 : 10x - 5y - 10z = -\frac{76}{3}$ und die Gerade $g : \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ -\frac{17}{5} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    (a) Wie lautet der Schnittpunkt und wie gross ist der Schnittwinkel von E_1 und g?

    (b) Wie sieht es mit Schnittpunkt und Schnittwinkel von $E_2 : 2x + y - z = -\frac{14}{3}$ mit g aus?

13. Wo und in welchem Winkel schneidet die y-Achse die Ebene $E : 4x - 4y + 7z = 12$?