

Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie XI

1. Der Betrag des Normalenvektors ist $n = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7$. Daraus folgt für die Abstände r der Ebenen vom Ursprung:

$$(a) \quad d = 14 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{|d|}{n} = \frac{14}{7} = \underline{\underline{2}} \quad (b) \quad d = 7 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{7}{7} = \underline{\underline{1}}$$

$$(c) \quad d = 0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{0}{7} = \underline{\underline{0}} \quad (d) \quad d = -2 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{2}{7} \quad (e) \quad d = -14 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{14}{7} = \underline{\underline{2}}$$

Alle fünf Ebenen sind parallel zueinander. Die erste und die letzte Ebene haben denselben Abstand vom Ursprung, liegen aber aufgrund des unterschiedlichen Vorzeichens von d auf gegenüberliegenden Seiten des Ursprungs. Die dritte Ebene verläuft durch den Ursprung.

2. Wiederum handelt es sich um zwei parallele Ebenen mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Der Ursprung liegt zwischen diesen beiden Ebenen, sodass in der einen KG der Parameter d positiv und in der anderen KG negativ ist. E_1 ist etwas weiter entfernt vom Ursprung, weil $|7| > |-5|$.

3. *Abstand zwischen Punkt und Ebene*

- (a) Die PD der Senkrechten s zu E durch P lautet:

$$\vec{P}_s(k) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4k \\ -4 - 8k \\ -2 + k \end{pmatrix}$$

Diese PD setzen wir für die Schnittpunktbestimmung in die KG von E ein:

$$4(1 + 4k) - 8(-4 - 8k) + (-2 + k) = 34 + 81k \stackrel{!}{=} 7 \quad \Leftrightarrow \quad 81k = -27 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = -\frac{1}{3}}}$$

Dieses k könnten wir in die PD von s einsetzen, um den Schnittpunkt S zu erhalten. Uns interessiert aber nur der Abstand, also der Verbindungsvektor \vec{PS} , der dem zweiten Glied in der PD entspricht. Dafür erhalten wir:

$$\vec{PS} = k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun ergibt sich für den Betrag dieses Vektors und somit für den gesuchten Abstand:

$$r = |\vec{PS}| = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{81} = \frac{1}{3} \cdot 9 = \underline{\underline{3}}$$

Bei solchen Betragsberechnungen wollen wir unter der Wurzel möglichst kleine ganze Zahlen zu Quadrieren haben. Das bedeutet, der Vorfaktor $-\frac{1}{3}$ sollte nicht in die Vektorkomponente hineingerechnet werden. Bei der Betragsberechnung bleibt sein Betrag als Faktor einfach erhalten.

- (b) Die KG der Parallelebene F zu E durch P ergibt sich folgendermassen:

$$F: 4x - 8y + z = d \quad \Rightarrow \quad P \text{ in } F: \quad 4 \cdot 1 - 8 \cdot (-4) + 1 \cdot (-2) = 34 \quad \Rightarrow \quad F: 4x - 8y + z = 34$$

Somit erhalten wir für die Abstände der Ebenen vom Ursprung:

$$D_1 = \frac{7}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2}} = \frac{7}{9} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{34}{\sqrt{4^2 + 8^2 + 1^2}} = \frac{34}{9}$$

Somit beträgt der Abstand zwischen den Ebenen resp. Punkt P und Ebene E :

$$D = D_2 - D_1 = \frac{34}{9} - \frac{7}{9} = \frac{27}{9} = \underline{\underline{3}}$$

Wir erhalten erwartungsgemäss dasselbe Resultat wie mit der früheren Methode.

- (c) i. Zur Bestimmung des Parameters d in der Parallelebene F muss der Punkt P in die linke Seite der KG von E eingesetzt werden:

$$7 \cdot (-5) + 4 \cdot 1 - 4 \cdot 5 = -51 \quad \Rightarrow \quad F: 7x + 4y - 4z = -51$$

Mit $n = \sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9$ folgt für die Abstände der Ebenen vom Ursprung:

$$D_1 = \frac{d_1}{n} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{d_2}{n} = \frac{-51}{9} = -\frac{17}{3}$$

Somit folgt für den Abstand zwischen der Ebene E und dem Punkt P :

$$D = |D_2 - D_1| = \left| -\frac{17}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) \right| = \left| -\frac{15}{3} \right| = \underline{\underline{5}}$$

Beachte, wie wir bei den Abständen der beiden Ebenen zum Ursprung das Vorzeichen noch mitnehmen. Dadurch wird abgebildet, auf welcher Seite des Ursprungs die jeweilige Ebene liegt. Diese Information ist für den Abstand der beiden Ebenen wichtig. Erst am Ende nehmen wir den Betrag der Differenz beider mit Vorzeichen versehenen Einzelabstände: $D = |D_2 - D_1|$.

- ii. Zunächst folgt für die Parallelebene F :

$$6 \cdot 7 - 2 \cdot 3 - 9 \cdot 1 = 27 \quad \Rightarrow \quad F: 6x - 2y - 9z = 27$$

Nun ist $n = \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2} = \sqrt{121} = 11$ und wir erhalten:

$$D_1 = \frac{d_1}{n} = \frac{-6}{11} \quad \text{und} \quad D_2 = \frac{d_2}{n} = \frac{27}{11}$$

Also beträgt der Abstand zwischen der Ebene E und dem Punkt P :

$$D = |D_2 - D_1| = \left| \frac{27}{11} - \left(-\frac{6}{11}\right) \right| = \left| \frac{33}{11} \right| = \underline{\underline{3}}$$

4. Wir rechnen: $D_1 = \frac{d_1}{n_1} = \frac{4}{\sqrt{3^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$ und $D_2 = \frac{d_2}{n_2} = \frac{-5}{\sqrt{2^2+2^2+4^2}} = \frac{-5}{\sqrt{24}}$.

Für den Vergleich quadrieren wir diese Abstände, damit wir die Wurzeln los sind:

$$D_1^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{18}}\right)^2 = \frac{16}{18} < 1 \quad \text{und} \quad D_2^2 = \left(\frac{-5}{\sqrt{24}}\right)^2 = \frac{25}{24} > 1$$

Damit ist $|D_1| < |D_2|$. **Die Ebene E_1 liegt näher am Ursprung.**

5. Dies ist ein Beispiel für eine Aufgabe, die sich nun nicht so gut mit der Abstandsberechnung lösen lässt, weil wir eine Information haben möchten, die sich nicht ganz so einfach mit dem Abstand bestimmen lässt. Ich zeige hier zwei Lösungen vor. Die erste mit der alten Methode, bei der wir eine Senkrechte s zu E durch P legen und diese Senkrechte mit der Ebene schneiden. So gelangen wir relativ direkt zum Spiegelungspunkt P' . Die zweite Variante arbeitet mit der neuen Abstandsberechnung zwischen Punkt und Ebene. Im Prinzip ist das rechnerische Vorgehen dann relativ einfach, aber man muss eben genau wissen, was zu tun ist.

Klassisches Vorgehen: Zuerst geben wir eine PD der Senkrechten s zu E durch P an:

$$\vec{P}_s(k) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3k \\ 6 - 4k \\ -20 + 5k \end{pmatrix}$$

Diese PD setzen wir in die KG von E ein:

$$3(-3 + 3k) - 4(6 - 4k) + 5(-20 + 5k) = -133 + 50k \stackrel{!}{=} 17 \quad \Leftrightarrow \quad 50k = 150 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{k = 3}}$$

Dieses k könnten wir in die PD von s einsetzen, um den Schnittpunkt S zu erhalten. Uns interessiert aber nur der Spiegelpunkt P' . Wenn uns $k = 3$ vom Punkt P auf die Ebene E führt, so führt uns $2k = 6$ direkt zum Spiegelpunkt. Wir erhalten somit sofort:

$$\vec{P}' = \vec{P}_s(6) = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P'(15, -18, 10)}}$$

Dieses Vorgehen dürfte in seiner Schlichtheit kaum zu toppen sein.

Neues Vorgehen mit Parallelebenen: Legen wir zuerst eine Parallelebene zu E durch P :

$$P \text{ in linke Seite der KG: } 3 \cdot (-3) - 4 \cdot 6 + 5 \cdot (-20) = -133 \Rightarrow F: 3x - 4y + 5z = -133$$

Damit beträgt der Abstand D , abgetragen von der E zur Ebene F (was das Verständnis für das Vorzeichen implizieren soll):

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = \sqrt{50} \Rightarrow D_E = \frac{17}{\sqrt{50}} \quad \text{und} \quad D_F = \frac{-133}{\sqrt{50}} \\ \Rightarrow D &= D_F - D_E = \frac{-133 - 17}{\sqrt{50}} = \frac{-150}{\sqrt{50}} = -3\sqrt{50} \end{aligned}$$

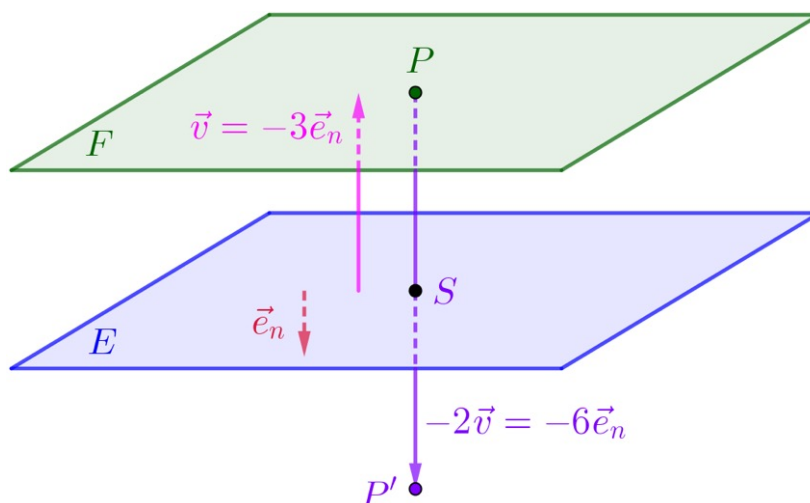
Dieser Abstand (inkl. Vorzeichen) bedeutet auch, dass wir von der Ebene E das $-3\sqrt{50}$ -Fache des Einheitsvektors \vec{e}_n gehen müssen, um zur Ebene F zu gelangen. Dieser Verschiebungsvektor ist also:

$$\vec{v} = -3\sqrt{50} \cdot \vec{e}_n = -3\sqrt{50} \cdot \frac{\vec{n}}{\sqrt{50}} = -3\vec{n} = -3 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nun liegt aber der Punkt P auf der Ebene F . Um seinen Spiegelpunkt zu erhalten, müssen wir folglich von P aus um $-2 \cdot \vec{v}$ verschieben. Somit erhalten wir für P' :

$$\vec{P}' = \vec{P} - 2\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} - 2 \cdot (-3) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -20 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{P'(15, -18, 10)}}$$

Das entspricht unserem Resultat aus dem klassischen Vorgehen. Rechnerisch ist das Verfahren kaum aufwändiger, aber man muss sich recht sicher sein, was man gerade macht und eine gute Vorstellung der Situation haben, die ich hier gleich nochmals explizit zeige:



6. Abstand zwischen zwei Geraden

Die beiden Parallelebenen, in denen die beiden Geraden liegen, haben dieselbe Ausrichtung, also denselben Normalenvektor \vec{n} . Da die Geraden in diesen Ebenen verlaufen, muss \vec{n} orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren sein. Das bedeutet, wir können \vec{n} ganz direkt aus dem Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren erhalten:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } n = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7$$

Jetzt setzen wir je den Aufpunkt der beiden Geraden in den Ebenen-Ansatz $-3x - 6y + 2z = d$ ein, um für jede Ebene den Parameter d zu bestimmen:

$$E_1 \text{ (enthält } g): \quad -3 \cdot 3 - 6 \cdot (-2) + 2 \cdot (-1) = -9 + 12 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -3x - 6y + 2z = 1$$

$$E_2 \text{ (enthält } h): \quad -3 \cdot 12 - 6 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = -36 - 18 + 6 = -48 \quad \Rightarrow \quad -3x - 6y + 2z = -48$$

Schliesslich bestimmen wir den Abstand dieser Ebenen und somit den Abstand zwischen den beiden Geraden wie gewohnt:

$$D = |D_1 - D_2| = \left| \frac{d_1}{n} - \frac{d_2}{n} \right| = \left| \frac{1}{7} - \frac{-48}{7} \right| = \left| \frac{49}{7} \right| = \underline{\underline{7}}$$

Bestimme den Abstand zwischen den Geraden

$$g: \quad \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } h: \quad \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Tipp: g und h liegen in zwei parallelen Ebenen E_g und E_h , die parallel zu den Richtungsvektoren \vec{v}_g und \vec{v}_h sind! Der Normalenvektor der beiden Ebenen lässt sich folglich wie bestimmen?