Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE XI: Abstandsberechnungen mit der Koordinatengleichung

Klasse 155c / AGe

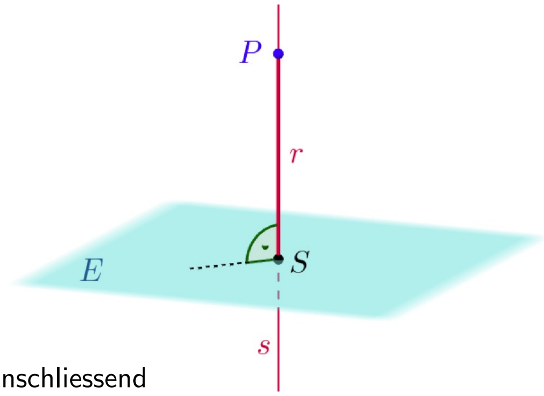
1. Gegeben sei die Ebene $E\colon\ 3x-2y+6z=d$. Wie gross ist der Abstand zwischen E und dem Ursprung für

   (a) $d=14$ (b) $d=7$ (c) $d=0$ (d) $d=-2$ (e) $d=-14$?

2. Zwei Ebenen seien durch $E_1\colon\ 3x-2y+4z=7$ und $E_2\colon\ 3x-2y+4z=-5$.
   Wie liegen sie relativ zueinander – auch in Bezug zum Ursprung?

3. *Abstand zwischen Punkt und Ebene*

   Es seien $E\colon\ 4x-8y+z=7$ und $P(1,-4,-2)$.



   (a) Bis vor Kurzem hatten wir noch nicht so viel Wissen über die Koordinatengleichung. Den Abstand r zwischen E und P hätten wir wohl so berechnet:
      i. PD der Senkrechten s zu E durch P.
      ii. Schneide s mit $E \to$ Schnittpunkt S.
      iii. Abstand $r=$ Betrag des Lotvektors $\overrightarrow{PS}$.

      Berechne den Abstand auf diese alte Weise, damit du anschliessend siehst, wie viel effizienter wir nunmehr unterwegs sein können.

   (b) Nun kommt unser neues Vorgehen zur Abstandsbestimmung zwischen einer Ebene E und einem Punkt P, das du gleich ausführen sollst:
      i. Gib die KG einer Parallelebene F zu E an, die durch den Punkt P verläuft.
      ii. Bestimme den Abstand beider Ebenen E und F zu Ursprung.
      iii. Berechne nun den Abstand zwischen den beiden Ebenen.

   (c) Trainiere das neue Vorgehen gleich nochmals an zwei Beispielen:

      i. $E\colon\ 7x+4y-4z=-6\ ,\quad P(-5,1,5)$ und   ii. $E\colon\ 6x-2y-9z=-6\ ,\quad P(7,3,1)$

      Mache dir jeweils klar, wie F bezüglich E und dem Ursprung im Koordinatensystem liegt.

4. Welche Ebene liegt näher am Ursprung $E_1:\ 3x-3z=4$ oder $E_2:\ 2x-2y-4z=-5$? (ohne TR!)

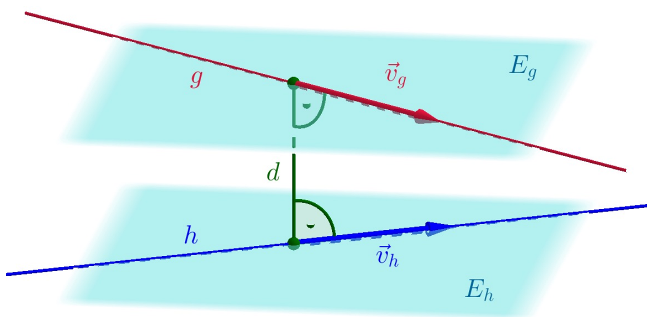
5. Spiegle den Punkt $P(-3,6,-20)$ an der Ebene $E:\ 3x-4y+5z=17$.

6. *Abstand zwischen zwei Geraden*

   Bestimme den Abstand zwischen den Geraden

$$g:\quad \vec{P}_g(s)=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\text{und}\quad h:\quad \vec{P}_h(t)=\begin{pmatrix}12\\3\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$



   Tipp: g und h liegen in zwei parallelen Ebenen E_g und E_h, die parallel zu den Richtungsvektoren $\vec{v}_g$ und $\vec{v}_h$ sind! Der Normalenvektor der beiden Ebenen lässt sich folglich wie bestimmen?