

SERIE XII: Prüfungsvorbereitung Vektorgeometrie im \mathbb{R}^3

Klasse 155c / AGe

1. Bestimme jeweils möglichst effizient den Abstand des Punktes $P(2, -3, 3)$ von der Ebene.

(a) $E_1 : 3x + y - z = 15$.

(b) $E_2 : \vec{P}_E(r, s) = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0.5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(c) E_3 durch die Punkte $A(5, -3, 4)$, $B(7, 1, 8)$ und $C(2, -4, -2)$.

2. Gegeben seien die beiden Punkte $A(4, 2, 3)$ und $B(2, 6, -7)$.

Bestimme die KG der *Mittelnormalebene*, also der Ebene, die alle Punkte P mit $|\vec{PA}| = |\vec{PB}|$ enthält.

3. Gegeben sind die Ebene $E : 3x - 4y + 4z = 12$ sowie die Punkte $P(1, 1, 0)$ und $Q(3, -1, 1)$.

(a) Welcher Punkt liegt näher an E ?

(b) E unterteilt den gesamten Raum in zwei *Halbräume*. Liegen P und Q im selben Halbraum?

4. $E_1 : 8x - 9y + 12z = 51$ und $E_2 : -16x + 18y - 24z = 68$ sind parallel. Weshalb? Abstand?

5. Gegeben seien die Gerade $g : \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, sowie der Punkt $P(2, -11, 11)$.

(a) Seit noch nicht allzu langer Zeit berechnen wir den Abstand d zwischen P und g mit dem Vektorprodukt. Weil der Betrag des Vektorproduktes der Fläche des Parallelogramms entspricht, das zwei Vektoren aufspannen, folgt

$$d = \frac{|\vec{v}_g \times \vec{AP}|}{v_g},$$

wie wir in Aufgabe 7 der Übungsserie 9 hergeleitet haben. Dabei ist A der Aufpunkt und \vec{v}_g der Richtungsvektor von g .

Führe diese Abstandsberechnung so durch, um wieder genau zu wissen, wie das geht.

(b) Hier stelle ich einen neuen Weg zur Abstandsberechnung vor:

i. Fasse \vec{v}_g als Normalenvektor einer Ebene E durch den Punkt P auf. Notiere damit die KG von E .

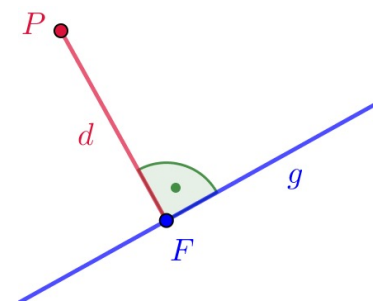
ii. Schneide g mit E . Der Schnittpunkt ist der Lot-Fusspunkt F !

iii. Ermittle den Abstand von P zu g , also den Betrag von \vec{PF} .

(c) Überlege dir nun, welche Variante der Abstandsberechnung dir effizienter erscheint.

(d) Nehmen wir an, es gehe nicht um die Bestimmung des Abstands, sondern lediglich darum *das Lot zu fällen*, also den Fusspunkt F zu bestimmen. Wie steht es nun um den Wert der neuen Methode?

(e) Fülle das Lot von $Q(-2, 10, -1)$ auf die Gerade $h : \vec{P}_h(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$.



6. Es seien $E_1 : 4x - 4y + 7z = 0$ und $E_2 : 10x + 2y - 11z = -12$.

Spitzer Schnittwinkel und PD der Schnittgerade?

7. Es seien $E : 9x - 4y + \sqrt{3}z = -30$ und $P(4, -1, 10)$. Abstand?

8. Spiegle den Punkt $P(-3, 6, -20)$ an der Ebene $E : 3x - 4y + 5z = 17$.

9. Zwei Ebenen E_1 und E_2 stehen senkrecht zueinander.

(a) Skizziere die Situation kurz allgemein.

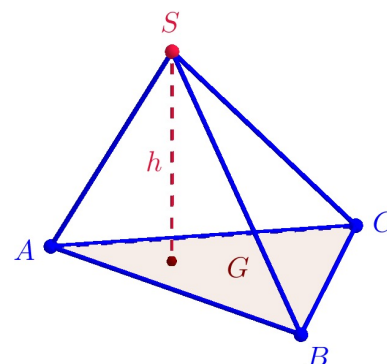
(b) Was kannst du über die Normalenvektoren der beiden Ebenen sagen?

(c) Wir geben eine dritte Ebene E_3 hinzu, die senkrecht zu den anderen beiden Ebenen steht. Welche Abhängigkeit gibt es nun zwischen den drei Normalenvektoren?

10. Die Grundfläche eines unregelmässigen Tetraeders habe die Eckpunkte $A(3, 0, 1)$, $B(3, 3, 0)$ und $C(0, 3, 0)$. Die Spitze sei $S(2, 2, 3)$.

Berechne das Tetraedervolumen.

Tipp: Teilschritte sind die Berechnung von Grundfläche G und Höhe h .



11. Es seien $E_1 : 3x - 4y = -29$ und $E_2 : 8x + 15y - 154z = -26$.

(a) Liegt $P(1, 8, 1)$ auf $E_1 \cap E_2$?

(b) Gib eine PD von $E_1 \cap E_2$ an!

(c) E_3 sei gegeben durch die drei Punkte $A(2, 6, -1)$, $B(-2, 3, 0)$ und $C(-6, 0, 4)$.

Wie steht E_3 zu E_1 ? Wie zu E_2 ? Schnittgeraden? Schnittwinkel? Abstände?

12. Die Gerade g verlaufe durch $A(-8, -13, 0)$ und $B(37, 7, -5)$. Wie weit ist $P(2, 14, 2)$ von g entfernt?

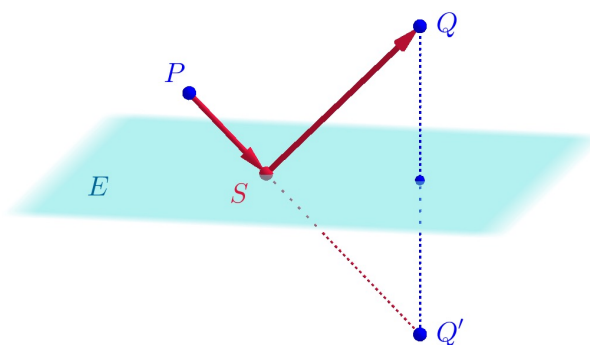
13. Welche Punkte auf der z -Achse besitzen den Abstand 12 zur Ebene $E : -2x + y + 2z = 50$?

14. Es sei $E : \vec{P}_E(r, s) = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Wie weit ist diese Ebene vom Ursprung entfernt?

15. Ein Lichtstrahl, der von $P(4, 5, -1)$ nach $Q(-7, 8, -9)$ geht, wird dazwischen einmal an der Spiegelebene $E : x + 3y - 2z = 7$ reflektiert. Bestimme den Reflexionspunkt S des Lichtstrahls auf E .

Tipp: Benutze die Grafik rechts als Hilfestellung!

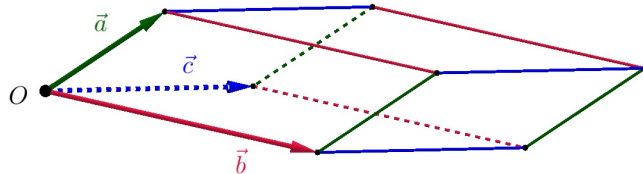


16. Bestimme die Punkte $P \in \mathbb{R}^3$, die von $A(4, -2, 9)$, $B(10, 10, -3)$ und $C(20, 3, 4)$ gleich weit entfernt sind.

Tipp: Diese Aufgabe ist verwandt mit Aufgabe 2.

17. Vom Ursprung aus wird durch die folgenden drei Vektoren ein Spat aufgespannt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$



- (a) Gib die Ebenen an, in denen die Seitenflächen des Spats liegen.
 (b) Berechne das Volumen des Spats.
 (c) Bestimme, ob der Punkt $P(7, 8, 0)$ innerhalb oder ausserhalb des Spats liegt.

18. Es seien $A(-2, 3, -1)$, $B(-5, 7, 5)$ und $C(7, -1, -3)$. Wie gross ist die Flächenzahl des Dreiecks ABC ?

19. Gegeben seien die Punkte $A(5, 0, -8)$, $B(8, -2, -10)$ und $C(1, 1, 2)$.

- (a) Die Gerade g verlaufe durch A und B . PD von $h \parallel g$ durch C ?
 (b) Abstand zwischen g und h ?

20. Es seien $E_1 : 2x - y + 3z = -4$ und $E_2 : x + y - 2z = 3$ sowie $P(2, 0, -1)$.

Ermittle die PD der zu den beiden Ebenen parallelen Gerade durch P .

Hinweis: Skizziere zuerst die Situation – allenfalls aus mehreren Perspektiven.

21. (a) Es seien $g : \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Wie gross ist der Abstand zwischen diesen beiden Geraden?

- (b) Es seien $g : \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Bestimme die PD der *Abstandsgerade* g , also der Gerade, die die kürzeste Verbindung zwischen g und h enthält.

- (c) Die beiden Teilaufgaben (a) und (b) scheinen recht verwandt, trotzdem sollte man sie ziemlich unterschiedlich angehen. Worin besteht der Unterschied und weshalb sind die Lösungswege verschieden?

22. Zwei Ebenen seien gegeben durch $E_1 : 2x - y + 4z = -4$ und $E_2 : \vec{P}_{E_2}(r, s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Bestimme die KG einer Ebene E_3 senkrecht zu E_1 und E_2 durch den Punkt $A(\frac{1}{2}, -1, 2)$.
 (b) Bestimme den Schnittpunkt der drei Ebenen!

23. Die quadratische Grundfläche $ABCD$ einer *Pyramide* liege in der Ebene E , die zusätzlich den Punkt $F(-3, \frac{1}{2}, -3)$ enthält. Die Eckpunkte $A(-2, 3, 1)$ und $B(0, 5, 0)$ sind gegeben.

- (a) Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene E .
 (b) Gib die zwei weiteren Eckpunkte C und D der Pyramiden-Grundfläche an. (Achtung: Es gibt zwei Varianten!)
 (c) Betrachte nun nur noch die Variante, bei der C und D positive z -Koordinaten aufweisen. Die Pyramide habe die Höhe $\frac{9}{2}$, die vom Mittelpunkt der Grundfläche aus zur Spitze S führt. Wie lauten die Koordinaten von S ?
 (d) Berechne das Volumen der Pyramide.