Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie II

1. Bei jeder Lösung steht zuerst die einfachst mögliche PD, was die Komponenten des Richtungsvektors angeht, und danach noch eine zweite Möglichkeit. Die Aufvektoren sind stets beliebig austauschbar!

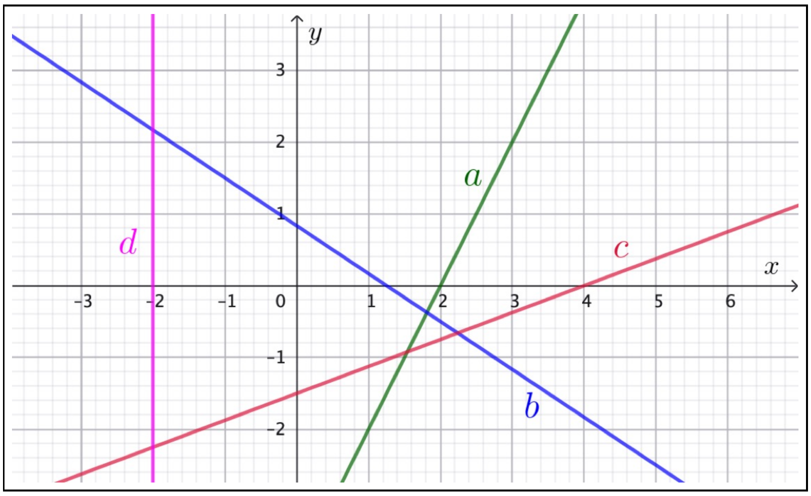
   (a) $y = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_a(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_a(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}}}$

   (b) $4x + 6y = 5 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_b(r) = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_b(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5/6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}}}$

   (c) $3x - 8y = 12 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_c(r) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_c(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3/2 \end{pmatrix}}}$

   (d) $x = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_d(r) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\vec{P}_d(s) = \begin{pmatrix} -2 \\ 100 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}}$

   Hier die zugehörigen Geraden im Koordinatensystem:



2. Zunächst die zugehörigen Geradengleichungen, wobei die implizite Form nicht eindeutig ist, aber punkto Koeffizienten so einfach wie möglich gewählt wurde:

   $g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -x + 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x + y = 1}}$

   $h: \quad \vec{P}_h(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x + 3y = -2}}$

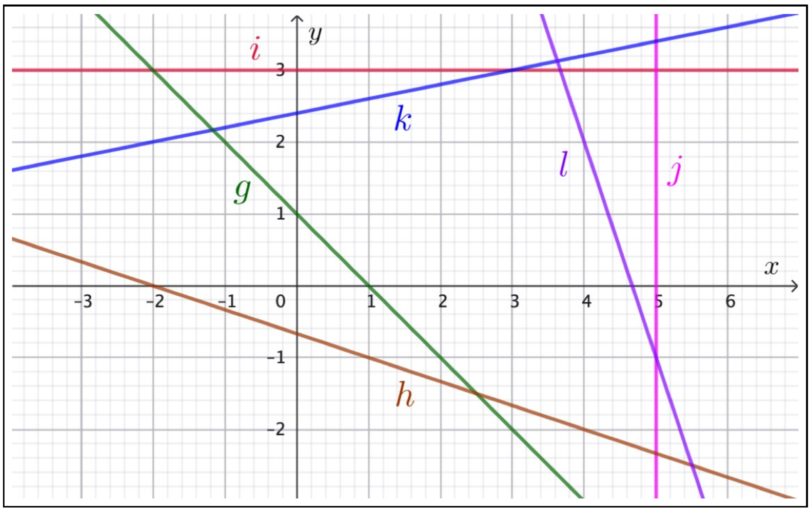
   $i: \quad \vec{P}_i(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = 3}}$ Horizontale!

   $j: \quad \vec{P}_j(u) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{x = 5}}$ Vertikale! $\Rightarrow$ keine explizite Form möglich!

   $k: \quad \vec{P}_k(v) = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = \frac{1}{5}x + \frac{12}{5}}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x - 5y = -12}}$

   $l: \quad \vec{P}_l(w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{y = -3x + 14}} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x + y = 14}}$

   Das Koordinatensystem mit den eingetragenen Geraden befindet sich oben auf der nächsten Seite.



Bei den Geraden k und l muss man sich gut überlegen, wie sie ins Bild kommen, weil die gegebenen Aufpunkte ausserhalb des sichtbaren Bereichs liegen!

Weitere Überlegungen zur Bearbeitung der Aufgabe 2:

- Aus dem Richtungsvektor $\vec{v}$ lässt sich jeweils ganz direkt die Steigung m bestimmen. Es gilt stets:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{v_y}{v_x} \quad \rightarrow \quad \text{lässt sich oft noch kürzen!}$$

Bsp.:
$$\vec{v}_g = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m_g = \frac{-3}{3} = -1$$
$$\vec{v}_h = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad m_h = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

  So wird auch klar, weshalb es bei j keine explizite Geradengleichung geben kann, denn bei der Steigungsberechnung müsste durch $v_x = 0$ dividiert werden. Die Steigung einer Vertikalen ist quasi unendlich gross.

- Kennt man mal die Steigung m, so kann der y-Achsenabschnitt q im Prinzip stets durch das Einsetzen des Aufpunktes A in den Ansatz $y = mx + q$ ermittelt werden:

Bsp.:
$$m_g = -1,\ A_g(-1,2) \quad \Rightarrow \quad 2 = -(-1) + q \quad \Leftrightarrow \quad q = 1 \quad \Rightarrow \quad y = -x + 1$$
$$m_h = -\frac{1}{3},\ A_h(1,-1) \quad \Rightarrow \quad -1 = -\frac{1}{3} \cdot 1 + q \quad \Leftrightarrow \quad q = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

- Aus der expliziten Geradengleichung lässt sich durch Äquivalenzumformungen ganz einfach eine implizite Geradengleichung gewinnen.

Bsp.:
$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 3y = -x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3y = -2$$

- Horizontalen und Vertikalen sind besonders einfach: $y = a$ beschreibt eine Horizontale auf der Höhe a, $x = b$ eine Vertikale bei der Stelle b. Die zugehörigen Parameterdarstellung haben im Richtungsvektor jeweils eine Komponente mit Wert 0.

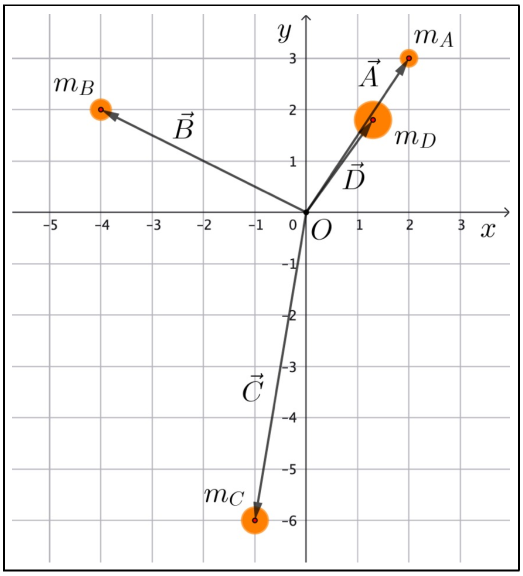
3. Hier geht es darum die Schwerpunktformel zu verwenden. Im Unterricht haben wir gelernt, dass der Schwerpunkt-Ortsvektor $\vec{S}$ von vier Massen m_A, m_B, m_C, m_D an den Orten A, B, C, D gegeben ist durch die mit den Massen gewichtete Mittelung der einzelnen Ortsvektoren:

$$\vec{S} = \frac{m_A \cdot \vec{A} + m_B \cdot \vec{B} + m_C \cdot \vec{C} + m_D \cdot \vec{D}}{m_A + m_B + m_C + m_D}$$

Gemäss Aufgabenstellung soll der Schwerpunkt im Ursprung $(0, 0)$ zu liegen kommen. Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned}
& \frac{m_A\vec{A} + m_B\vec{B} + m_C\vec{C} + m_D\vec{D}}{m_A + m_B + m_C + m_D} = \vec{S} \overset{!}{=} 0 && | \cdot (m_A + \ldots + m_D) \\
\Leftrightarrow \quad & m_A\vec{A} + m_B\vec{B} + m_C\vec{C} + m_D\vec{D} = 0 && | - m_A\vec{A} - m_B\vec{B} - m_C\vec{C} \\
\Leftrightarrow \quad & m_D\vec{D} = -m_A\vec{A} - m_B\vec{B} - m_C\vec{C} && | : m_D \\
\Leftrightarrow \quad & \vec{D} = -\frac{1}{m_D}\left(m_A\vec{A} + m_B\vec{B} + m_C\vec{C}\right) && |\text{Werte einsetzen} \\
& = -\frac{1}{10} \cdot \left(2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \\
& = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 12 - 5 \\ 6 + 6 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/10 \\ 18/10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 13/10 \\ 9/5 \end{pmatrix}}}
\end{aligned}$$

Zum Abschluss der Aufgabe noch eine Veranschaulichung. Ich habe die Massen in ein Koordinatensystem eingezeichnet und den Radius des einzelnen Massenpunktes jeweils proportional zu $\sqrt{m}$ eingetragen, sodass wir ein Gefühl für den Einfluss der jeweiligen Masse erhalten:



Wir sehen, wie die Masse m_D vor allem so platziert werden muss, dass sie die weite entfernte und einigermassen grosse Masse m_C kompensieren und den Schwerpunkt in den Ursprung bringen kann.

4. Das ist effektiv kein Problem! Die Steigung einer Gerade ergibt sich jeweils aus einem Steigungsdreieck. Es ist der Quotient aus stehender Seite Δy und liegender Seite Δx:

$$m := \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Bei der Angabe eines Richtungsvektors $\vec{v} = \binom{\Delta x}{\Delta y}$ zu einer Gerade mit Steigung m dürfen wir uns die Länge von $\vec{v}$ beliebig vorgeben. Insbesondere dürfen wir fordern, dass der Vektor die x-Komponente $v_x = \Delta x = 1$ aufweist. Dann beträgt der zugehörige Schritt in y-Richtung:

$$\Delta y = m \cdot \Delta x = m \cdot 1 = m$$

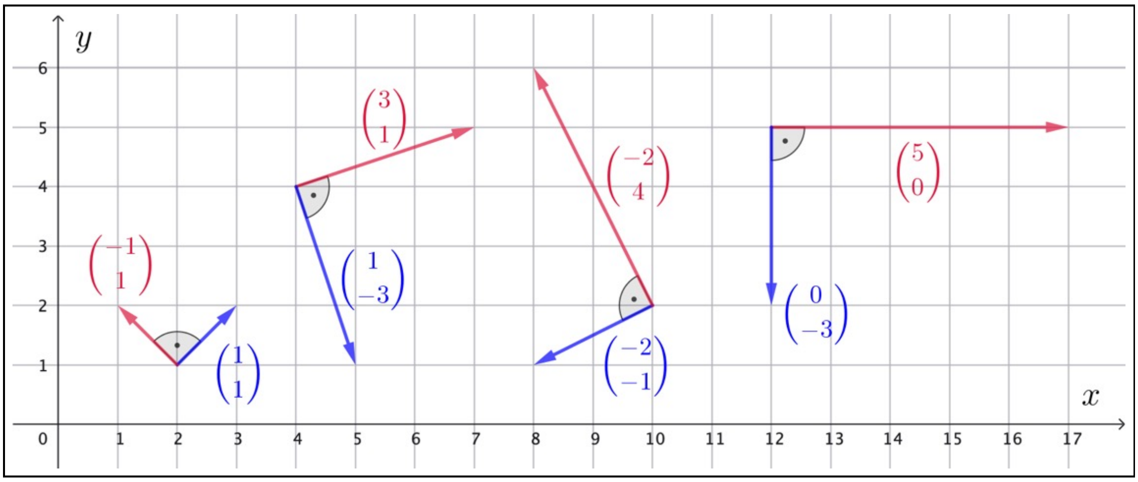
Demnach können wir einen zu einer bestimmten Steigung m gehörenden Richtungsvektor – ohne irgendetwas rechnen zu müssen – stets wie folgt notieren:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}}}$$

5. (a) Sind zwei Vektoren kollinear, so ist der eine ein reelles Vielfaches des anderen: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Das lässt sich überprüfen, indem wir aus den x-Komponenten, also aus $b_x = k \cdot a_x$, den Skalierungsfaktor k gewinnen und anschliessend schauen, ob derselbe Faktor auch $b_y = k \cdot a_y$ erfüllt.

   Im Zweidimensionalen können wir alternativ die beiden Vektoren als Richtungsvektoren zweier Geraden auffassen und die zugehörigen Steigungen $m_a = \frac{a_y}{a_x}$ resp. $m_b = \frac{b_y}{b_x}$ berechnen. Stimmen beide Steigungswerte überein, $m_a = m_b$, so sind die Vektoren kollinear.

   (b) Betrachten wir Repräsentanten verschiedener orthogonaler Vektorpaare:



   Ein paar Beobachtungen:

   - Bei gleich langen Vektoren treten dieselben Zahlen in den Komponenten der beiden orthogonalen Vektoren auf. Allerdings werden dabei die Komponenten getauscht und in einer Komponente muss das Vorzeichen gewechselt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   - Ist ein Vektor kürzer, so kann er durch einen geeigneten Faktor so vergrössert werden, dass er wieder gleich lang ist wie der andere Vektor und dann gilt wieder das gleiche Prinzip wie eben beschrieben:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \frac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Multipliziert man jeweils die beiden x-Komponenten miteinander und macht dasselbe mit den beiden y-Komponenten, so ergibt sich stets die Gegenzahl:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 1\cdot(-1) = -1 \quad\text{und}\quad 1\cdot 1 = 1$$
$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 1 = 3 \quad\text{und}\quad 1\cdot(-3) = -3$$
$$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (-2)\cdot(-2) = 4 \quad\text{und}\quad 4\cdot(-1) = -4$$
$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 5\cdot 0 = 0 \quad\text{und}\quad 0\cdot(-3) = 0 \quad (=-0)$$

  Addiert man jeweils die beiden Komponentenprodukte zweier orthogonaler Vektoren, so ergibt sich anscheinend stets der Wert 0:

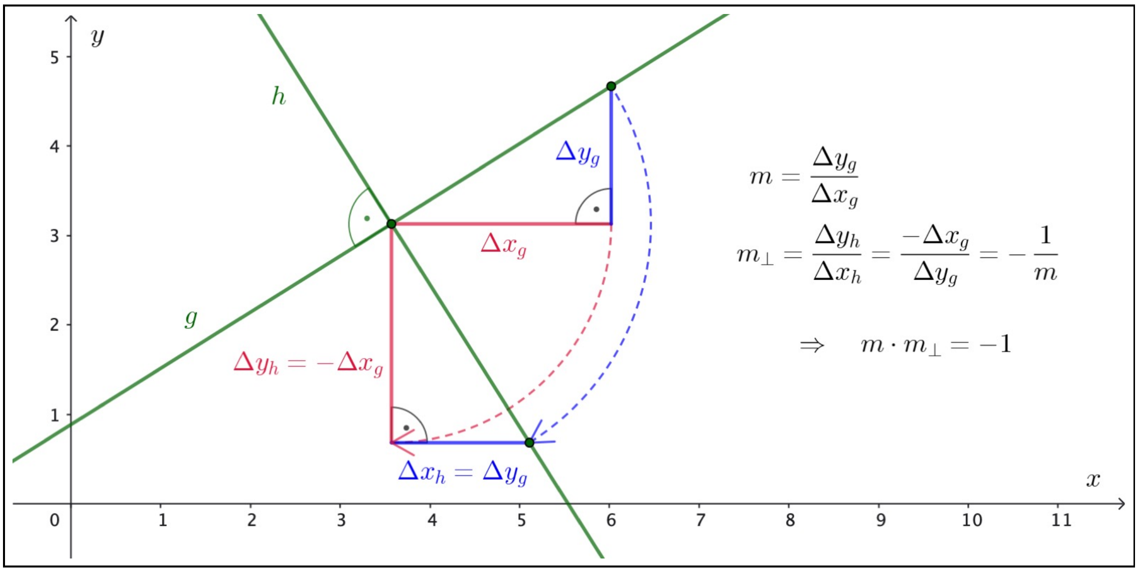
$$\begin{pmatrix}a_x\\a_y\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}b_x\\b_y\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y \overset{?}{=} 0 \quad\Rightarrow\quad \text{Falls ja} \rightarrow \text{orthogonal!}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 1\cdot(-1) + 1\cdot 1 = -1 + 1 = 0$$
$$\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 3\cdot 1 + 1\cdot(-3) = 3 - 3 = 0$$
$$\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad (-2)\cdot(-2) + 4\cdot(-1) = 4 - 4 = 0$$
$$\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad 5\cdot 0 + 0\cdot(-3) = 0 + 0 = 0$$

  Das scheint ein gutes Prinzip zu sein! Können wir es allgemein beweisen?

Tatsächlich ist das gar nicht weiter schwierig, wenn wir uns an eine Aussage zu den Steigungen von zueinander senkrecht stehenden Geraden erinnern: Ist m die Steigung einer Geraden g und $m_\perp$ die Steigung einer dazu senkrecht stehenden Gerade h, so gilt stets:

$$m \cdot m_\perp = -1$$

Der Grund dafür ergibt sich aus der folgenden Grafik:



Sind nun allerdings die Steigungen der beiden Geraden auf diese Weise miteinander verknüpft, so können wir mit dem Resultat aus Aufgabe 4 sofort folgern:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ m_\perp \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad m \cdot m_\perp = -1$$
$$\Rightarrow \quad a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y = 1 \cdot 1 + m \cdot m_\perp = 1 + (-1) = 0$$

Relativ bald werden wir nochmals viel ausführlicher über Winkel zwischen Vektoren nachdenken und dann sogar in der Lage sein, beliebige solche Winkel aus den Vektoren zu berechnen. Dabei spielt das sogenannte **Skalarprodukt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$, das du nun bereits kennengelernt hast, die zentrale Rolle:

Skalarprodukt zweier Vektoren: $\quad \vec{a} \cdot \vec{b} := a_x b_x + a_y b_y$

Bereits jetzt kannst du dir merken: Zwei Vektoren stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ist.

Weiter kannst du bereits jetzt erahnen, dass es dieses Skalarprodukt dann auch im dreidimensionalen Raum geben wird – es ist ja ganz offensichtlich, wie es auf dreikomponentige Vektoren zu erweitern ist . . .

6. Zunächst sollten wir feststellen, ob g und h parallel zueinander liegen. Dies ist der Fall, wenn die Richtungsvektoren kollinear sind. Diese Überprüfung führen wir wie unter 5.(a) beschrieben durch.

   Nun unterscheiden wir:

   Geraden parallel: Nun gilt es zwischen echter Parallelität und Identität zu unterscheiden. Im Falle von Identität muss der Aufpunkt der einen Gerade auch auf der anderen Gerade liegen. Es müsste also ein r geben, sodass $\vec{P}_g(r) = \vec{B}$ ist, oder umgekehrt ein s, sodass $\vec{P}_h(s) = \vec{A}$ ist. Der Parameter r resp. s muss gleichzeitig die beiden Komponentengleichungen erfüllen!

   Geraden schneiden sich: Wir überprüfen, ob g und h senkrecht zueinander stehen. Dies ist gemäss Aufgabe 5.(b) genau dann der Fall, wenn das Skalarprodukt ihrer Richtungsvektoren verschwindet, wenn also $u_x v_x + u_y v_y = 0$ ist. Ansonsten stehen g und g schief zueinander.

7. Ich starte mit der Gerade g und vergleiche sie einzeln mit den anderen Geraden:

   Vergleich g und h: Kollinearität der Richtungsvektoren?

   $\binom{3}{2}$ und $\binom{-3}{1}$ können aufgrund der Vorzeichen in ihren Komponenten sicher nicht kollinear sein $\Rightarrow$ g und h **schneiden sich**!

   Für das Skalarprodukt der Richtungsvektoren erhalten wir: $3 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = -7 \neq 0$. Somit stehen g und h **schief zueinander**!

   Bestimmen wir noch den Schnittpunkt:

$$\vec{P}_g(r) \stackrel{!}{=} \vec{P}_h(s) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -2 + 3r = 0 - 3s \\ -4 + 2r = 2 + s \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3r + 3s = 2 \\ 2r - s = 6 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 3r + 3s = 2 \\ 6r - 3s = 18 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \quad 9r = 20 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{20}{9} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_{gh} = \vec{P}_g\left(\frac{20}{9}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{20}{9} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 14/3 \\ 4/9 \end{pmatrix}}}$$

   Bemerke: Wir brauchen lediglich einen der beiden Parameter bestimmen und dann diesen Wert in die zugehörige PD einsetzen. Würden wir auch noch den anderen Parameter berechnen, so ergäbe sich, eingesetzt in dessen zugehörige PD, genau derselbe Punkt – schliesslich handelt es sich um den Schnittpunkt, also um den Punkt, der zu beiden Geraden gehört.

Vergleich g und i: Kollinearität der Richtungsvektoren?

Gut sichtbar ist $\binom{-6}{-4} = (-2) \cdot \binom{3}{2} \Rightarrow g$ und i verlaufen **parallel**!

(Bereits jetzt merken wir uns: h und i sind nicht kollinear, weil g und h nicht kollinear sind, aber g eben kollinear zu i ist.)

Wir überprüfen, ob der Aufpunkt von i auf g liegt:

$$\vec{P}_g(r) \stackrel{?}{=} \vec{A}_i \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}-2+3r=-1\\-4+2r=0\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}r=\frac{1}{3}\\r=2\end{matrix} \right|$$

Offensichtlich ergibt sich in den beiden Komponenten nicht derselbe Faktor k, sodass der Aufpunkt von i nicht Teil der Gerade g sein kann. Folglich sind g und i **echt parallel**!

Vergleich g und j: Kollinearität der Richtungsvektoren? Also: $\binom{9/2}{3} = k \cdot \binom{3}{2}$?

Tatsächlich stimmt dies für $k = \frac{3}{2}$. Der Richtungsvektor von j ist das 1.5-fache des Richtungsvektors von g und somit sind diese Richtungsvektoren kollinear $\Rightarrow g$ und j liegen parallel (und somit ist j auch parallel zu i).

Ist der Aufpunkt von j ein Punkt auf g?

$$\vec{P}_g(r) \stackrel{?}{=} \vec{A}_j \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}-2+3r=7\\-4+2r=2\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}r=3\\r=3\end{matrix} \right|$$

Tatsächlich liegt $\binom{7}{2}$ auf g und somit sind g und j **identisch**! Wir brauchen für j also keine Abklärungen mehr zu machen, wenn wir mit g durch sind.

Vergleich g und k: Kollinearität der Richtungsvektoren? Nein! $\binom{3}{2}$ und $\binom{2}{6}$ sind ganz offensichtlich nicht kollinear (alle Komponenten positiv, aber im Richtungsvektor von g ist die x-Komponente grösser als die y-Komponente und im Richtungsvektor von k ist das gerade umgekehrt) $\Rightarrow g$ und k **schneiden sich**!

Überprüfen der Orthogonalität mittels Skalaprodukt der Richtungsvektoren: $3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 = 18 \neq 0$ $\Rightarrow g$ und k liegen **schief zueinander**.

Bleibt noch die Bestimmung des Schnittpunktes:

$$\vec{P}_g(r) \stackrel{!}{=} \vec{P}_k(v) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix}-2+3r=4+2v\\-4+2r=-2+6v\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}3r-2v=6\\2r-6v=2\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}9r-6v=18\\-2r+6v=-2\end{matrix} \right|$$

$$\Rightarrow \quad 7r = 16 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{16}{7} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_{gk} = \vec{P}_g\left(\frac{16}{7}\right) = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + \frac{16}{7} \cdot \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix}34/7\\4/7\end{pmatrix}}}$$

Vergleich h und i: Da i parallel zu g ist und g weder parallel, noch senkrecht zu h verläuft, müssen auch h und i **schief zueinander** liegen!

Es bleibt nur noch den Schnittpunkt zu ermitteln:

$$\vec{P}_h(s) \stackrel{!}{=} \vec{P}_i(t) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix}0-3s=-1-6t\\2+s=0-4t\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}-3s+6t=-1\\s+4t=-2\end{matrix} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{matrix}-3s+6t=-1\\3s+12t=-6\end{matrix} \right|$$

$$\Rightarrow \quad 18t = -7 \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{7}{18} \quad \Rightarrow \quad \vec{S}_{hi} = \vec{P}_i\left(-\frac{7}{18}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - \frac{7}{18} \cdot \begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} = \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix}4/3\\14/9\end{pmatrix}}}$$

Vergleich h und j: Diesen Vergleich können wir überspringen, weil j identisch mit g ist. Somit liegen auch h und j **schief** zueinander mit Schnittpunkt $S_{hj} = S_{gh} = (\frac{14}{3}, \frac{4}{9})$.

Vergleich h und k: Kollinearität der Richtungsvektoren?

Die Vorzeichen der Komponenten der Richtungsvektoren sagen uns ohne weitere Rechnung bereits, dass h und k nicht parallel verlaufen können und sich folglich schneiden müssen.

Wir überprüfen mittels Skalarprodukt, ob die beiden Richtungsvektoren orthogonal sind: $(-3)\cdot 2 + 1\cdot 6 = -6+6 = 0$. Ja, die beiden Richtungsvektoren und sind orthogonal und die somit stehen h und k senkrecht zueinander.

Es bleibt nur noch den Schnittpunkt zu ermitteln:

$$\vec{P}_h(s) \overset{!}{=} \vec{P}_k(v) \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 0-3s = 4+2v \\ 2+s = -2+6v \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} -3s-2v = 4 \\ s-6v = -4 \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 9s+6v = -12 \\ s-6v = -4 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow\quad 10s = -16 \quad\Leftrightarrow\quad s = -\frac{8}{5} \quad\Rightarrow\quad \vec{S}_{hk} = \vec{P}_h\left(-\frac{8}{5}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} - \frac{8}{5}\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} = \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix}24/5\\2/5\end{pmatrix}}}$$

Vergleich i und j: Das haben wir schon erledigt, weil j identisch mit g ist. i und j sind folglich ebenfalls **echt parallel**!

Vergleich i und k: Da i und g parallel sind und zudem g und k schief zueinander liegen, liegen auch i und k **schief zueinander**!

Wiederum gilt es nur noch den Schnittpunkt zu bestimmen:

$$\vec{P}_i(t) \overset{!}{=} \vec{P}_k(v) \quad\Rightarrow\quad \left|\begin{array}{c} -1-6t = 4+2v \\ 0-4t = -2+6v \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} -6t-2v = 5 \\ -4t-6v = -2 \end{array}\right| \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{c} 18t+6v = -15 \\ -4t-6v = -2 \end{array}\right|$$

$$\Rightarrow\quad 14t = -17 \quad\Leftrightarrow\quad t = -\frac{17}{14} \quad\Rightarrow\quad \vec{S}_{ik} = \vec{P}_i\left(-\frac{17}{14}\right) = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - \frac{17}{14}\cdot\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix} = \ldots = \underline{\underline{\begin{pmatrix}44/7\\34/7\end{pmatrix}}}$$

Vergleich j und k: Auch hier gibt es aufgrund der Identität von g und j nichts mehr zu tun. j und k liegen **schief zueinander** und schneiden sich in $S_{jk} = S_{gk} = (\frac{34}{7}, \frac{4}{7})$!

Zum Schluss schauen wir uns noch die grafische Situation an. Alle fünf Schnittpunkte liegen "per Zufall" im ersten Quadranten des Koordinatensystems und drei davon sehr nahe beieinander: