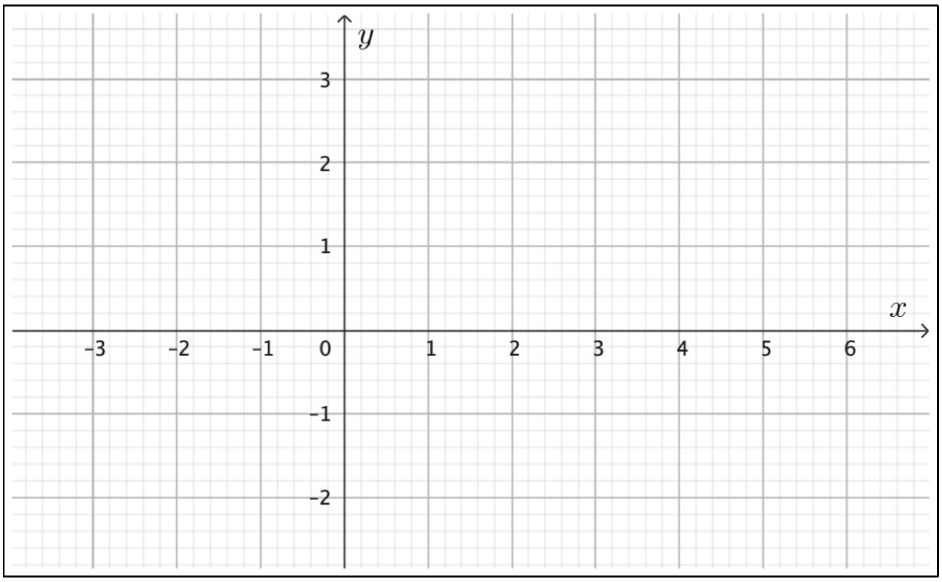
Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE II: Ortsvektoren und Parameterdarstellung von Geraden im $\mathbb{R}^2$

Klasse 155c / AGe

1. Wandle die folgenden Geradengleichungen in Parameterdarstellungen um. Gib **jeweils zwei PDs** mit unterschiedlichen Auf- und Richtungsvektoren an! Versuche in einer der beiden Varianten den punkto Komponentenzahlen einfachst möglichen Richtungsvektor zu verwenden. Skizziere die zugehörigen Geraden im nachfolgenden Koordinatensystem.

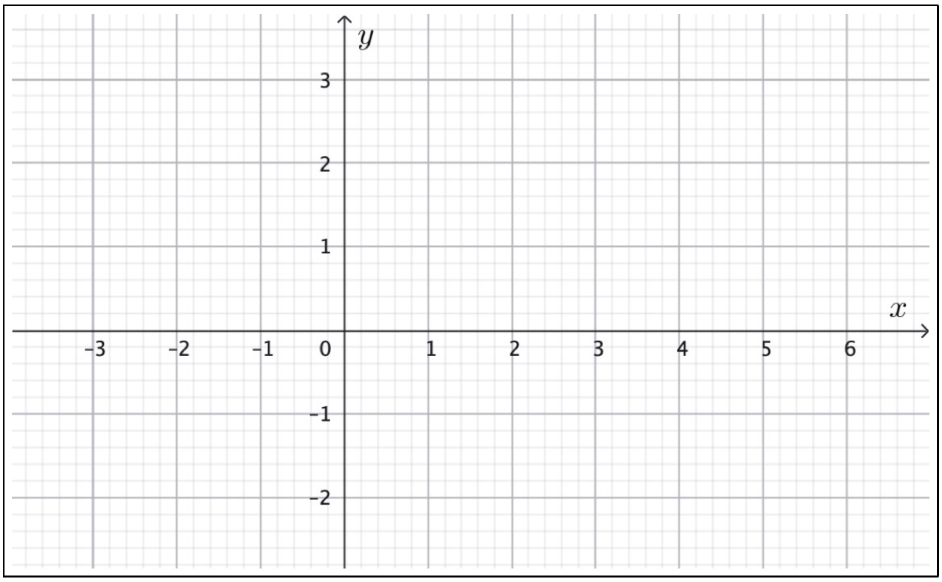
   (a) $y = 2x - 4$ (b) $4x + 6y = 5$ (c) $3x - 8y = 12$ (d) $x = -2$



2. Skizziere die folgenden Geraden im Koordinatensystem darunter und gib je die explizite und eine möglichst einfache implizite Geradengleichung dazu an:

$$g:\ \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad h:\ \vec{P}_h(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad i:\ \vec{P}_i(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$j:\ \vec{P}_j(u) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad k:\ \vec{P}_k(v) = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad l:\ \vec{P}_l(w) = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$



3. Eine Masse von $2\,\mathrm{kg}$ sitze am Punkt $A(2,3)$, eine von $3\,\mathrm{kg}$ in $B(-4,2)$, eine weitere von $5\,\mathrm{kg}$ in $C(-1,-6)$. An welchem Punkt D muss sich die vierte Masse von $10\,\mathrm{kg}$ befinden, damit der Schwerpunkt der vier Massen in den Ursprung zu liegen kommt?

4. In der expliziten Geradengleichung $y = mx + q$ taucht unmittelbar sichtbar die Steigung m der zugehörigen Gerade auf. Damit kann man ohne weitere Rechnung sofort einen Richtungsvektor $\vec{v}$ einer möglichen Parameterdarstellung notieren. Wie denn? Wie lautet dieser Richtungsvektor, für den es überhaupt nichts mehr zu rechnen gibt?

5. Oft wird uns interessieren, wie zwei Vektoren relativ zueinander stehen. Die beiden wichtigsten Fälle sind die **Kollinearität** (parallele Ausrichtung) und die **Orthogonalität** (senkrechte Ausrichtung).
   (a) Rep.: Wie ermittelst du möglichst effizient, ob zwei Vektoren **kollinear** sind?
   (b) Wie findest du möglichst effizient heraus, ob zwei Vektoren $\vec{a} = \binom{a_x}{a_y}$ und $\vec{b} = \binom{b_x}{b_y}$ **orthogonal** sind? Gib eine einfache Beziehung an, die für die vier Komponenten a_x, a_y, b_x und b_y gelten muss, wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander stehen!
   Tipp: Denke dir selber ein paar möglichst einfache Beispiele aus!

6. Bei zwei Geraden g und h im $\mathbb{R}^2$ unterscheiden wir punkto **relativer Lage** zwei Fälle voneinander:

   Parallelität: g und h sind **parallel** zueinander. Wir unterscheiden weiter:
   - g und h sind **identisch**, liegen also aufeinander.
   - g und h sind **echt parallel**, liegen also mehr oder weniger weit nebeneinander.

   Schnittpunkt: g und h **schneiden sich**. Wir unterscheiden weiter:
   - g und h stehen **senkrecht** zueinander.
   - g und h stehen **schief** zueinander, schneiden sich also in irgendeinem Winkel $\alpha \neq 90°$.

   Überlege dir generell, wie du herausfindest, welcher der obigen vier Fälle zutrifft, wenn zwei Geraden durch
   $$g: \quad \vec{P}_g(r) = \vec{A} + r \cdot \vec{u} \qquad \text{und} \qquad h: \quad \vec{P}_h(s) = \vec{B} + s \cdot \vec{v}$$
   gegeben sind. Was gibt es konkret zu tun?

7. Wir betrachten die folgenden fünf Geraden:
   $$g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{P}_h(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   $$i: \quad \vec{P}_i(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad j: \quad \vec{P}_j(u) = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 9/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$
   $$k: \quad \vec{P}_k(v) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$
   (a) Wende dein "Rezept" aus Aufgabe 6 auf jedes Paar der folgenden fünf Geraden an, um dessen relative Lage zu bestimmen.
   (b) Bestimme bei allen Paaren von sich schneidenden Geraden zudem den Schnittpunkt.
   Hinweis: Versuche diese Schnittpunkte durch direktes Gleichsetzen der Parameterdarstellungen zu erreichen. Es ergibt sich jeweils ein 2x2-Gleichungssystem für die beiden Parameter. Weshalb genügt es, wenn du jeweils den Wert eines der beiden Parameter bestimmst?