Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie III

1. Für die Vektorbeträge erhalten wir:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = \underline{\underline{5}} \qquad b = \sqrt{2^2+1^2} = \underline{\underline{\sqrt{5}}} \qquad c = \sqrt{\pi^2+0^2} = \underline{\underline{\pi}} \qquad d = \sqrt{5^2+12^2} = \underline{\underline{13}}$$

2. Der Vektor $\vec{u} = \binom{-1}{2}$ hat den Betrag $u = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$. Nun müssen wir ihn mittels skalarer Multiplikaion so strecken, dass er den Betrag 2 erhält. Dabei dürfte man ihn zusätzlich auch umkehren, denn der neue Vektor soll ja einfach parallel, also kollinear zum alten Vektor sein. Es sind also zwei Lösungen $\vec{v}$ möglich:

$$\vec{v} = \pm k \cdot \vec{u} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\pm \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{5} \end{pmatrix}}}$$

Der Streckfaktor $k = \frac{2}{\sqrt{5}}$ wandelt den $\sqrt{5}$ langen Vektor $\vec{u}$ in den 2 langen Vektor $\vec{v}$ um.

Nochmals anders gedacht: $\frac{\vec{u}}{u} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{5}}$ ist der Einheitsvektor (mit Länge 1) in Richtung von $\vec{u}$. Dieser muss nur noch mit dem Faktor ± 2 gestreckt werden.

3. Für den Einheitsvektor erhalten wir "straight forward":

$$e_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{\binom{6}{-8}}{\sqrt{6^2+8^2}} = \frac{\binom{6}{-8}}{10} \left(= \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right) = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}}}$$

4. Wir berechnen den Betrag des Vektors $\vec{v} = \binom{3-t}{t+4}$ in Abhängigkeit von t an. Er muss gleich 17 sein:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{(3-t)^2+(t+4)^2} = \sqrt{9-6t+t^2+t^2+8t+16} = \sqrt{2t^2+2t+25} \stackrel{!}{=} 17$$

Nun können wir die quadrieren und die daraus folgende quadratische Gleichung für t auflösen:

$$\Rightarrow \quad 2t^2+2t+25 = 289 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2+2t-264 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2+t-132 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (t+12)(t-11) = 0$$

Somit ist $\underline{\underline{t=-12}}$ oder $\underline{\underline{t=11}}$. Dazu gehören die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3-(-12) \\ -12+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-11 \\ 11+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 15 \end{pmatrix}$$

5. *Abstandsbestimmung "Punkt – Gerade"*

   (a) *Variante 1: Senkrechte Gerade und Schnittpunktbestimmung*

   Der einfachst mögliche Richtungsvektor einer zu g senkrechten Gerade h lautet $\vec{v} = \binom{3}{5}$, denn damit ergibt das Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren 0:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 15 - 15 = 0$$

   Somit lautet eine PD der zu g senkrechten Gerade h durch den Punkt Q:

$$h: \quad \vec{P}_h(s) = \vec{Q} + s \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Jetzt ermitteln wir den Fusspunkt F, also den Schnittpunkt von g mit h:

$$g \cap h: \quad \vec{P}_g(t) = \vec{P}_h(s) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} -3 + 5t = 3 + 3s \\ 8 - 3t = 1 + 5s \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 5t - 3s = 6 \\ -3t - 5s = -7 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 15t - 9s = 18 \\ -15t - 25s = -35 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad -34s = -17 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{s = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{P}_h\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 7/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{F\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) = F(4.5, 3.5)}$$

Und schliesslich können wir den Vektor $\overrightarrow{QF}$ und seinen Betrag $|\overrightarrow{QF}|$ angeben, der ja dem Abstand d zwischen Q und g entspricht:

$$\overrightarrow{QF} = \vec{F} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9/2 - 3 \\ 7/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{QF}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9 + 25}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{34}}{2}}} \approx 2.92$$

Anmerkung: Bei genauerem Hinsehen stellen wir fest, dass wir jetzt ein bisschen zuviel gerechnet haben. Bei der Berechnung des Fusspunkt-Ortsvektors $\vec{F}$ haben wir den Parameterwert $s = \frac{1}{2}$ in die PD von h, also in $\vec{P}_h(s) = \vec{Q} + s \cdot \vec{v}$ eingesetzt. Darin ist $s \cdot \vec{v}$ genau der Vektor, der zu Q hinzuaddiert werden muss, um zum Punkt F zu gelangen. Das bedeutet, $s \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \binom{3}{5}$ ist bereits der Vektor $\overrightarrow{QF}$. Wenn wir das verstanden haben, müssen wir nicht zuerst die Koordinaten von F angeben, um hinterher den Vektor $\overrightarrow{QF}$ aus $\vec{F} - \vec{Q}$ zu berechnen. Es geht dann viel schneller:

$$s = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QF} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{QF}| = \ldots = \underline{\underline{\frac{\sqrt{34}}{2}}}$$

Natürich funktioniert dieser kürzere Weg nur dann, wenn ich aus dem Gleichungssystem oben gezielt den Parameter s und nicht etwa den Parameter t bestimme.

(b) *Variante 2: Minimiere d mittels Differentialrechnung*

Die Koordinaten jedes Punktes $P \in g$ lassen sich in Abhängigkeit des Parameters t notieren:

$$\vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5t \\ 8 - 3t \end{pmatrix}$$

Mit diesem Ausdruck können wir auch den Vektor $\overrightarrow{QP}$ vom Punkt Q zu jedem so gegebenen Punkt $P \in g$ notieren:

$$\overrightarrow{QP} = \vec{P}_g(t) - \vec{Q} = \begin{pmatrix} -3 + 5t \\ 8 - 3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 5t \\ 7 - 3t \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich für den Abstand zwischen dem Punkt Q und jedem solchen Punkt $P \in g$:

$$d = |\overrightarrow{QP}| = \sqrt{(-6 + 5t)^2 + (7 - 3t)^2} = \sqrt{36 - 60t + 25t^2 + 49 - 42t + 9t^2}$$

$$= \sqrt{85 - 102t + 34t^2} = \sqrt{17(5 - 6t + 2t^2)} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{2t^2 - 6t + 5}$$

Dieser Ausdruck – oder das Quadrat davon – wird für ein bestimmtes t minimal, das wir mittels Differentialrechnung aufspüren:

$$\text{Ableiten:} \qquad [2t^2 - 6t + 5]' = 4t - 6 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t_{\min} = \frac{3}{2}}$$

Zurückeinsetzen von $t_{\min}$ in den Ausdruck für d liefert den gesuchten minimalen Abstand:

$$d = \sqrt{17} \cdot \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 5} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{\frac{9 - 18 + 10}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{17}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{34}}{2}}} \approx 2.92$$

(c) *Variante 3: Benutze Orthogonalität der Richtungsvektoren*

Die Koordinaten jedes Punktes $P \in g$ lassen sich in Abhängigkeit des Parameters t notieren:

$$\vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+5t \\ 8-3t \end{pmatrix}$$

Mit diesem Ausdruck können wir auch den Vektor $\overrightarrow{QP}$ vom Punkt Q zu jedem so gegebenen Punkt $P \in g$ notieren:

$$\overrightarrow{QP} = \vec{P}_g(t) - \vec{Q} = \begin{pmatrix} -3+5t \\ 8-3t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+5t \\ 7-3t \end{pmatrix}$$

Ist der Punkt $P \in g$ der Fusspunkt F, so muss dieser Vektor $\overrightarrow{QP}$ genau senkrecht zum Richtungsvektor von g gehen. Aus der Forderung dieser Orthogonalität erhalten wir mittels Skalarprodukt direkt den Wert des Parameters t, der zum Punkt F gehört:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6+5t \\ 7-3t \end{pmatrix} = 5(-6+5t) + (-3)(7-3t) = -30 + 25t - 21 + 9t = -51 + 34t \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 34t = 51 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = \frac{3}{2}}$$

Zum Schluss bestimmen wir den Fusspunkt F und daraus den minimalen Abstand d:

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{P}_g\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{QF} = \vec{F} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 9/2-3 \\ 7/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{QF}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9+25}{4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{34}}{2}}} \approx 2.92$$

6. (a) Ich wähle willkürlich Variante 1, lege also eine zu g senkrechte Gerade h durch A und bestimme dann den Schnittpunkt F von g und h. Zunächst benötige ich einen Richtungsvektor der zu g senkrechten Gerade h:

$$g \text{ hat Richtungsvektor } \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad h \text{ hat Richtungsvektor } \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad h: \quad \vec{P}_h(s) = \vec{A} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Nun schneiden wir g und h und erhalten so den gesuchten Fusspunkt F:

$$g \cap h: \quad \vec{P}_g(r) = \vec{P}_h(s) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 16+12r = -3+5s \\ 12+5r = -10-12s \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 12r - 5s = -19 \\ 5r + 12s = -22 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad \left| \begin{array}{c} 144r - 60s = -228 \\ 25r + 60s = -110 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad 169r = -338 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r = -2}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \vec{P}_g(-2) = \begin{pmatrix} 16 \\ 12 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{F(-8, 2)}}$$

(b) Hier wähle ich z.B. die Minimierungsvariante 2 mit Verwendung der Differentialrechnung. Vorab wandle ich die implizite Geradengleichung für h in eine PD um:

$$2x - y = 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{G}_h(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dann sind der Abstandsvektor $\overrightarrow{BP}$ resp. der Abstand $d = |\overrightarrow{BP}|$ in Abhängigkeit des Parameters k gegeben durch:

$$\overrightarrow{BP} = \vec{P}_h(k) - \vec{B} = \begin{pmatrix} k \\ -3+2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+3 \\ -3+2k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(k+3)^2 + (-3+2k)^2} = \sqrt{5k^2 - 6k + 18}$$

Den Ausdruck unter der Wurzel optimieren resp. minimieren wir und finden für das zum Fusspunkt F gehörige k:

$$[5k^2 - 6k + 18]' = 10k - 6 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{k_{\min} = \frac{3}{5}}$$

Somit ergibt sich für den gesuchten Abstand zwischen Punkt B und Gerade h:

$$d = \sqrt{5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{5} + 18} = \sqrt{\frac{9 - 18 + 90}{5}} = \sqrt{\frac{81}{5}} = \underline{\underline{\frac{9}{\sqrt{5}}}} = \underline{\underline{\frac{9\sqrt{5}}{5}}}$$

(c) Für diese Fragestellung wähle ich schliesslich noch die dritte Variante und suche in Abhängigkeit des Parameters s nach dem Vektor $\overrightarrow{CP}$, der senkrecht zur Gerade j steht.
Zunächst notiere ich den Vektor $\overrightarrow{CP}$ in Abhängigkeit von s:

$$\vec{P}_j(s) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3s \\ -2-2s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{CP} = \vec{P}_j(s) - \vec{C} = \begin{pmatrix} 8+3s \\ -2-2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8+3s \\ -12-2s \end{pmatrix}$$

Nun soll dieser Vektor senkrecht zum Richtungsvektor $\binom{3}{-2}$ von j stehen. Daraus folgt mit dem Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8+3s \\ -12-2s \end{pmatrix} &= 3(-8+3s) + (-2)(-12-2s) \\ &= -24 + 9s + 24 + 4s = 13s \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad s = 0 \end{aligned}$$

Offenbar ist der Fusspunkt F des Lotes von C auf die Gerade j per Zufall gerade der Aufpunkt $A(8, -2)$ $(s = 0)$. Somit berechnen wir für den Abstand:

$$d = |\overrightarrow{CF}| = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(8-16)^2 + (-2-10)^2} = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{16(4+9)} = \underline{\underline{4\sqrt{13}}} \approx 14.42$$