Übungen zur Vektorgeometrie

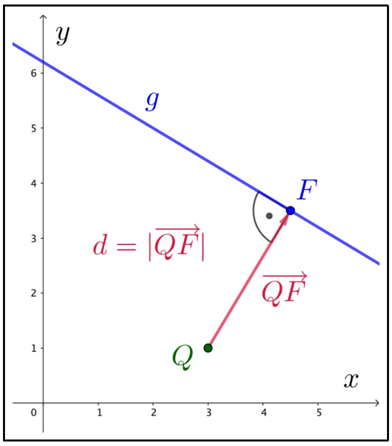
SERIE III: Vektorbeträge, Einheitsvektoren und Abstände im $\mathbb{R}^2$

Klasse 155c / AGe

1. Welche Beträge (= Längen) haben die Vektoren $\vec{a} = \binom{3}{-4}$, $\vec{b} = \binom{-2}{-1}$, $\vec{c} = \binom{-\pi}{0}$ und $\vec{d} = \binom{5}{12}$?
2. Gesucht ist ein Vektor parallel zu $\binom{-1}{2}$ mit Betrag 2.
3. Wie lautet der Einheitsvektor in Richtung $\binom{6}{-8}$?
4. Wie ist der Parameter t zu wählen, damit der Vektor $\binom{3-t}{t+4}$ die Länge 17 hat?
5. *Abstandsbestimmung "Punkt – Gerade"*

   Es seien $g : \vec{P}_g(t) = \binom{-3}{8} + t \cdot \binom{5}{-3}$ und $Q(3, 1)$.

   Bestimme den Abstand d zwischen g und Q, also die kleinste Distanz, mit der man vom Punkt Q auf die Gerade g gelangt.

   (a) *Variante 1: Senkrechte Gerade und Schnittpunktbestimmung*

   Im Prinzip müssen wir von Q aus das *Lot* auf g fällen, also den *Fusspunkt* $F \in g$ so bestimmen, dass die Strecke QF senkrecht zur Gerade g steht. Danach erhalten wir den gesuchten Abstand aus $d = |\overrightarrow{QF}|$.

   Vorgehen: Gib zuerst eine PD der Gerade h durch Q und F an, um danach F als Schnittpunkt von g und h zu bestimmen.

   (b) *Variante 2: Minimiere d mittels Differentialrechnung*

   Der Abstand jedes Punktes $P \in g$ zum Punkt Q lässt sich in Abhängigkeit von t notieren:

   $$\vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} -3+5t \\ 8-3t \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{QP} = \vec{P}_g(t) - \vec{Q} = \ldots \quad \Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{QP}| = \ldots$$

   Sobald der Ausdruck für d in Abhängigkeit von t einmal dasteht, kann man ihn in mittels Differentialrechnung minimieren, also nach t ableiten und dann ...

   So erhalten wir den Parameter t, der zum Fusspunkt F, also zum minimalen Abstand gehört. Folglich können wir genau dieses t unseren Ausdruck für d einsetzen und erhalten daraus den gesuchten Abstand.

   (c) *Variante 3: Benutze Orthogonalität der Richtungsvektoren*

   Wie in Variante 2 notieren wir in Abhängigkeit des Parameters t den Vektor QP von Q zu irgendeinem Punkt $P \in g$. Für $P = F$ muss dieser Vektor senkrecht zum Richtungsvektor $\binom{5}{-3}$ von g stehen. Also können wir das Skalarprodukt notieren und dieses dann gleich 0 setzen:

   $$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \overrightarrow{QP} = \ldots \stackrel{!}{=} 0$$

   Aus dieser Gleichung folgt der zum Fusspunkt F gehörende Wert des Parameters t und wir können die Aufgabe so abschliessen, wie wir das schon unter Variante 2 gemacht haben.

6. Löse jede der folgenden drei Aufgaben mit einer anderen Variante aus Aufgabe 5:

   (a) Bestimme den Fusspunkt des Lotes von $A(-3, -10)$ auf die Gerade $g : \vec{P}_g(r) = \binom{16}{12} + r \cdot \binom{12}{5}$.

   (b) Wie gross ist der Abstand zwischen $h : 2x - y = 3$ und $B(-3, 0)$?

   (c) In welcher Entfernung passiert die Gerade $j : \vec{P}_j(s) = \binom{8}{-2} + s \cdot \binom{3}{-2}$ den Punkt $C(16, 10)$?