Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE IV: Repetition und Ausblick auf die Winkelberechnung

Klasse 155c / AGe

1. Bestimme paarweise die relativen Lagen folgender Geraden (inkl. Schnittpunkte, falls vorhanden):

$$g: \quad y = -\frac{x}{2} + 3 \qquad h: \quad \vec{P}_h(k) = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad i: \quad 8x - 6y = 15$$

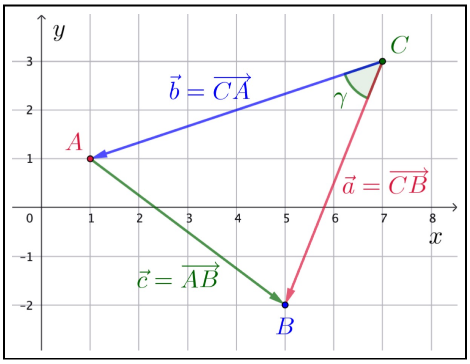
2. Bestimme ebenso die relative Lage der beiden Geraden

$$g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{P}_h(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1/3 \end{pmatrix} \quad .$$

3. Wie weit ist der Punkt $P(7, -1)$ von der Gerade $g : \vec{P}_g(m) = \binom{-35/2}{-26} + m \cdot \binom{5}{12}$ entfernt?

4. Überlege dir ein vektorgeometrisches Verfahren, wie sich der Abstand zwischen zwei parallelen Geraden, von denen jede durch eine PD gegeben ist, bestimmen lässt.

   Wende dann dein Verfahren auf die beiden Geraden aus Aufgabe 2 an.



5. Gegeben sei das Dreieck in der Grafik rechts. Benutze den

   Cosinussatz $\qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad ,$

   um den Eckwinkel γ bei C zu berechnen. Arbeite dabei mit den Beträgen der Seitenvektoren, z.B. $\vec{c} = \overrightarrow{AB} \;\Rightarrow\; c = |\overrightarrow{AB}|$.

6. Im Prinzip die gleiche Aufgabenstellung wie in Aufgabe 5, jetzt sollen aber nur zwei Seitenvektoren gegeben sein: $\vec{a} = \overrightarrow{CB} = \binom{-2}{1}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CA} = \binom{3}{2}$.

   Bestimme auch hier den Winkel γ.

7. Gegeben seien die beiden sich schneidenden Geraden

$$g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{P}_h(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

   Verwende die beiden Richtungsvektoren, um den Schnittwinkel zwischen g und h zu berechnen.

   Tipp: Überlege dir zuerst, was diese Aufgabenstellung mit den Aufgaben 5 und 6 zu tun hat. Eine Grafik mag helfen.

8. Versuche nun die Aufgabe 7 allgemein zu lösen. Gegeben seien also zwei Geraden

$$g: \quad \vec{P}_g(r) = \vec{A} + r \cdot \vec{u} \quad \text{und} \quad h: \quad \vec{P}_h(s) = \vec{B} + s \cdot \vec{v} \qquad \text{mit} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad .$$

   Wie lässt sich der Schnittwinkel von g und h allgemein aus den Komponenten u_x, u_y, v_x und v_y der Richtungsvektoren berechnen?

   Tipp 1: Drücke $\vec{v} - \vec{u}$ durch die Komponenten von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aus; ebenso dann $|\vec{v} - \vec{u}|^2$.

   Tipp 2: Vereinfache dein Resultat soweit als möglich unter Verwendung des Skalarprodukts $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ldots$

9. Bestimme nun mit dem eben in Aufgabe 8 gefundenen Resultat den Winkel zwischen den beiden Vektoren $\binom{7}{-1}$ und $\binom{3}{4}$ möglichst speditiv.

10. Wie gross ist der spitze Winkel zwischen $g : \vec{P}_g(m) = \binom{e}{\sqrt{3}} + m \cdot \binom{3}{-1}$ und $h : \vec{P}_h(n) = \binom{\pi}{\sqrt{3}} + n \cdot \binom{1}{4}$?