

# Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie VI

## 1. Grundlegende Verständnisfragen

- (a) Ein *Vektor* in der zweidimensionalen Ebene beschreibt eine *Verschiebung* oder *Translation* innerhalb dieser Ebene, und zwar um eine bestimmte Distanz in eine bestimmte Richtung. Eine solche Verschiebung kann in einer Skizze durch einen oder auch mehrere *Pfeile* repräsentiert werden, sodass wir den einzelnen Pfeil als *Repräsentanten* des Vektors bezeichnen.

Sobald wir einen Ursprung  $O$  des Koordinatensystems definiert haben, gehört zu jedem Punkt  $P$  in der Ebene eine Verschiebung, die vom Ursprung zum Punkt  $P$  führt. Diese Verschiebung bezeichnen wir als *Ortsvektor* und schreiben dafür kurz  $\vec{P}$  (anstelle von  $\overrightarrow{OP}$ ). Ortsvektoren benutzen wir also zur Beschreibung von Punkten. Sie sind eine spezielle Art von Vektoren, also eine Art Unterkategorie des Oberbegriffs Vektor.

- (b) Komponentenweise zu rechnen bedeutet, dass wir die Rechnung in jeder Vektorkomponente einzeln durchführen. Z.B. gilt für Vektoraddition und -subtraktion eben:

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x - v_x \\ u_y - v_y \end{pmatrix}$$

Der Vollständigkeit halber hier auch noch die skalare Multiplikation:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot v_x \\ k \cdot v_y \end{pmatrix}$$

- (c)  $m \cdot \vec{a}$ : Hier handelt es sich um eine *skalare Multiplikation* des Vektors  $\vec{a}$  mit dem Skalar  $m$ . Das Resultat ist ein Vektor.

$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ : Zunächst wird in der Klammer das Skalarprodukt aus den beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  gebildet, dessen Resultat – wie der Name schon sagt – eben ein Skalar ist. Hinterher findet folglich eine skalare Multiplikation des Vektors  $\vec{c}$  statt, sodass am Ende ein Vektor resultiert.

$(\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c})$ : In der vorderen Klammer findet eine Vektorsubtraktion statt, deren Resultat selber wieder ein Vektor ist. In der zweiten Klammer wird das Skalarprodukt der Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$  gebildet, dessen Resultat ein Skalar, also einfach eine einzelne reelle Zahl ist. Somit findet hinterher eine skalare Multiplikation des Vektors  $(\vec{b} - \vec{a})$  mit dem Skalar  $(\vec{a} \cdot \vec{c})$  statt, sodass am Ende ein Vektor herauskommt.

$(m + n) \cdot (\vec{a} + \vec{c})$ : In der vorderen Klammer werden zwei Skalare addiert. Es handelt sich also um die ganz normale Addition innerhalb der reellen Zahlen. In der hinteren Klammer sehen wir eine Vektoraddition, deren Resultat auch wieder ein Vektor ist. Insgesamt findet also eine skalare Multiplikation des Vektors  $(\vec{a} + \vec{c})$  mit dem Skalar  $(m + n)$  statt, woraus ein neuer Vektor hervorgeht.

$\vec{c} + m$ : Hier soll offenbar ein Vektor und ein Skalar addiert werden. Ohne irgendeine Vorschrift, wie das gehen soll, ergibt diese Operation keinen Sinn, denn wie sollen ein zweidimensionales und ein eindimensionales Objekt überhaupt addiert werden können?

- (d) Wie berechnet sich der Abstand zwischen zwei Punkten  $P$  und  $Q$  und wie die Länge eines Vektors vom einen zum anderen Punkt?

Die beiden Fragen haben dieselbe Antwort. Sobald wir die Komponenten der beiden Punkte  $P$  und  $Q$  kennen, ergibt sich ihr Abstand  $d$  aus dem *Satz des Pythagoras*. Dabei ist, wenn wir an die Koordinaten zweier denken:

$$\Delta x = x_Q - x_P, \quad \Delta y = y_Q - y_P \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

Andererseits erhalten wir für den Betrag des Vektors  $\overrightarrow{PQ}$ :

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} x_Q - x_P \\ y_Q - y_P \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad d = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$

2. Zunächst überprüfen wir allfällige Kollinearitäten, indem wir die Richtungsvektoren der Geraden miteinander vergleichen.

$$f: 2x + \frac{3}{2}y = 5 \Leftrightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3} \Rightarrow m = -\frac{4}{3} \Rightarrow \vec{v}_f = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$g: y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7} \Rightarrow m = -\frac{1}{7} \Rightarrow \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{P}_h(r) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5/2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_h = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{kollinear zu } f!$$

$$i: \vec{P}_i(s) = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_i = \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Nach kurzem Hinsehen wird klar, dass die Gerade  $i$  senkrecht zu  $f$  und  $h$  stehen muss, denn das Skalarprodukt der Richtungsvektoren ergibt 0:

$$\vec{v}_f \cdot \vec{v}_i = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 0$$

Insgesamt können wir vier Schnittpunkte erwarten:  $f$  schneidet sich mit  $g$  und  $i$  und  $h$  schneidet sich mit  $g$  und  $i$ .

Ev. sind es auch nur zwei Schnittpunkte, falls  $f$  und  $h$  nicht nur parallel, sondern sogar identisch sind. Überprüfen wir dies zuerst. Im Falle der Identität müsste der Aufpunkt  $(10, \frac{5}{2})$  von  $h$  auch auf der Gerade  $f$  liegen, also die Geradengleichung von  $f$  lösen:

$$2 \cdot 10 + \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{95}{4} \neq 5 \Rightarrow f \text{ und } h \text{ sind **echt parallel!**}$$

Wir bemerken: Man muss nicht immer mit den Parameterdarstellungen arbeiten! Oftmals ist es einfacher zumindest in Teilen mit der expliziten oder der impliziten Geradengleichung zu rechnen, wie wir gleich noch sehen werden, wenn wir die Schnittpunkte bestimmen:

$f \cap g$ : Wir setzen die explizite Form von  $g$  in die implizite Form von  $f$  ein (Einsetzungsverfahren):

$$\begin{aligned} 2x + \frac{3}{2}y = 5 &\Rightarrow 2x + \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7} \right) = 5 \Leftrightarrow 2x - \frac{3}{14}x + \frac{60}{7} = 5 \Leftrightarrow x = -2 \\ &\Rightarrow y = -\frac{1}{7} \cdot (-2) + \frac{40}{7} = \frac{42}{7} = 6 \Rightarrow S_{fg}(-2, 6) \end{aligned}$$

$f \cap h$ : Hier gibt es keinen Schnittpunkt zu berechnen, weil  $f$  und  $h$  echt parallel sind.

$f \cap i$ : Wir können die  $x$ - und die  $y$ -Komponente, die durch die PD von  $i$  gegeben sind, direkt in die implizite Geradengleichung von  $f$  einsetzen:

$$\begin{aligned} 2x + \frac{3}{2}y = 5 &\Rightarrow 2 \left( \frac{13}{2} + 2s \right) + \frac{3}{2} \left( 3 + \frac{3}{2}s \right) = 5 \Leftrightarrow 13 + 4s + \frac{9}{2} + \frac{9}{4}s = 5 \\ &\Leftrightarrow s = -2 \Rightarrow \vec{P}_i(-2) = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{fi} \left( \frac{5}{2}, 0 \right) \end{aligned}$$

$g \cap h$ : Auch hier setzen wir am einfachsten die PD von  $h$  in die explizite Geradengleichung von  $g$  ein:

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7} &\Rightarrow \frac{5}{2} + 4r = -\frac{1}{7}(10 - 3r) + \frac{40}{7} \Leftrightarrow \frac{5}{2} + 4r = \frac{3}{7}r + \frac{30}{7} \\ &\Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{P}_h \left( \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{gh} \left( \frac{17}{2}, \frac{9}{2} \right) \end{aligned}$$

$g \cap i$ : Und wiederum setzen wir die PD (von  $i$ ) in die Geradengleichung (von  $g$ ) ein:

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7} \Rightarrow 3 + \frac{3}{2}s = -\frac{1}{7}\left(\frac{13}{2} + 2s\right) + \frac{40}{7} \Leftrightarrow 3 + \frac{3}{2}s = -\frac{2}{7}s + \frac{67}{14}$$

$$\Leftrightarrow s = 1 \Rightarrow \vec{P}_h(1) = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{gi}\left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

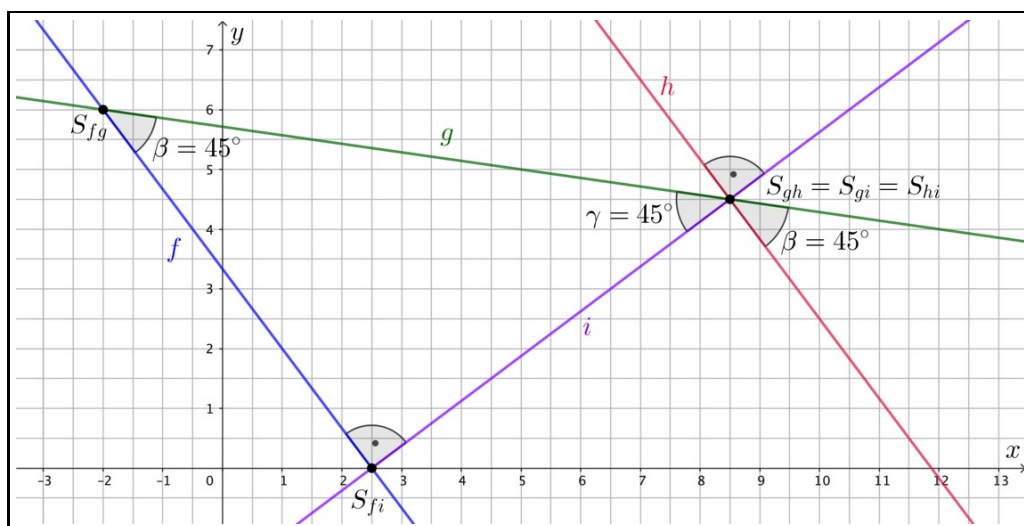
$h \cap i$ : Wir haben bereits herausgefunden, dass der Punkt  $\left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}\right)$  sowohl der Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $h$ , als auch der Schnittpunkt der Geraden  $g$  und  $i$  ist. Er liegt also sowohl auf  $h$ , als auch auf  $i$  und muss folglich auch der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sein!  $\Rightarrow S_{hi}\left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}\right)$ .

Damit wir zum Schluss dieser Schnittpunktberechnungen aber nochmals ein Beispiel zur Gleichsetzung zweier PDs vor Augen haben, führe ich diese Rechnung hier noch explizit aus:

$$\vec{P}_h(r) \stackrel{!}{=} \vec{P}_i(s) \Rightarrow \begin{vmatrix} 10 - 3r = \frac{13}{2} + 2s \\ \frac{5}{2} + 4r = 3 + \frac{3}{2}s \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 3r + 2s = \frac{7}{2} \\ 8r - 3s = 1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 9r + 6s = \frac{21}{2} \\ 16r - 6s = 2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 25r = \frac{25}{2} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{P}_h\left(\frac{1}{2}\right) = \dots = \begin{pmatrix} 17/2 \\ 9/2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{gh}\left(\frac{17}{2}, \frac{9}{2}\right)$$

Nun können wir alle vier Geraden skizzieren:



“Per Zufall” gibt es also nur drei Schnittpunkt anstatt vier, weil sich die drei Geraden  $g$ ,  $h$  und  $i$  in einem Punkt treffen.

Es bleibt einerseits noch die Bestimmung der Schnittwinkel:

$f \cap g$ : Aus den Richtungsvektoren  $\vec{v}_f$  und  $\vec{v}_g$  erhalten wir:

$$\cos \beta = \frac{\vec{v}_f \cdot \vec{v}_g}{v_f \cdot v_g} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{25}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

$f \cap i$ : Wir haben bereits herausgefunden, dass  $f$  und  $i$  senkrecht zueinander stehen. Der Schnittwinkel beträgt also  $90^\circ$ .

$g \cap i$ : Wiederum können wir rechnen:

$$\cos \gamma = \frac{\vec{v}_g \cdot \vec{v}_i}{v_g \cdot v_i} = \frac{\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{7^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{25}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{25}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = 45^\circ$$

Das hätten wir aufgrund obiger Grafik auch ohne zu rechnen voraussagen können, denn  $\beta$  und  $\gamma$  müssen zusammen  $90^\circ$  ergeben.

**Schnittwinkel von  $h$ :** Die Gerade  $h$  ist parallel zur Gerade  $f$ . Sie weist somit mit  $g$  und  $i$  dieselben Schnittwinkel auf wie  $f$ ; und mit  $f$  selber gibt es gar keinen Schnittwinkel.

Andererseits müssen wir noch den Abstand  $d$  von  $f$  und  $h$  angeben. Dies ist, aufgrund der Orthogonalität von  $f$  und  $i$  und der Parallelität von  $f$  und  $h$  einfach die Länge des Verbindungsvektors  $\overrightarrow{S_{fi}S_{hi}}$ :

$$\overrightarrow{S_{fi}S_{hi}} = \vec{S}_{hi} - \vec{S}_{fi} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} - \frac{5}{2} \\ \frac{9}{2} - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow d = |\overrightarrow{S_{fi}S_{hi}}| = \sqrt{6^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$$

3. (a) Wenn man die "Schwerpunkts-Geschichte" geschnallt hat, schreibt man für  $\vec{u}$  ohne Zwischenschritt auf:

$$\underline{\underline{\vec{u} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}}}$$

**Erläuterung:**  $F$  liegt auf der Verbindungsstrecke zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ . Somit können wir  $F$  als Schwerpunkt zweier Massen in den Punkten  $A$  und  $B$  auffassen. Aufgrund der Unterteilung der Strecke in vier Teilstücke muss die Masse bei  $A$  dreimal so gross sein wie die Masse bei  $B$ . Gemäss der Schwerpunkt-Formel ergibt sich dann direkt obige Lösung.

Wer möchte, kann diese Lösung aber auch folgendermassen erhalten:

$$\vec{u} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} = \vec{b} + \frac{1}{4}(\vec{a} - \vec{b}) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}}}$$

**Erläuterung:** An den Vektor  $\vec{b}$  muss ein Viertel des Vektors  $\vec{c}$  angehängt werden, um von  $C$  nach  $F$  zu gelangen. Der Vektor  $\vec{c}$  ist aber gerade die Differenz der anderen beiden Seitenvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ , also  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ .

- (b) Um zum Punkt  $D$  zu gelangen, müssen wir von  $C$  aus um zwei Drittel des Vektors  $\vec{a}$  verschieben. Wenn wir  $C$  als den Ursprung des Koordinatensystems auffassen, schreiben wir also für den Ortsvektor von  $D$ :  $\vec{D} = \frac{2}{3}\vec{a}$ .

Unter Aufgabe (a) haben wir bereits herausgefunden, wie sich der Ortsvektor zum Punkt  $F$  zusammensetzt:

$$\vec{F} = \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$$

Nun können wir mittels Vektorsubtraktion den Vektor  $\vec{v} = \overrightarrow{DF}$  bestimmen:

$$\vec{v} = \overrightarrow{DF} = \vec{F} - \vec{D} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} = \underline{\underline{\frac{3}{4}\vec{b} - \frac{5}{12}\vec{a}}}$$

4. Gemäss Aufgabenstellung soll der Vektor  $\overrightarrow{AP}$  die Länge 2 und der Vektor  $\overrightarrow{BP}$  die Länge 3 aufweisen. Das sind zwei Bedingungen resp. zwei Gleichungen, aus denen sich die Koordinaten von  $P$ , also  $x$  und  $y$  bestimmen lassen sollten:

$$\overrightarrow{AP} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{BP} = \vec{P} - \vec{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} |\overrightarrow{AP}| = 2 \\ |\overrightarrow{BP}| = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2 \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 3 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} (x+1)^2 + y^2 = 4 \quad \textcircled{1} \\ (x-1)^2 + y^2 = 9 \quad \textcircled{2} \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1}: (x-1)^2 - (x+1)^2 = 5 \Leftrightarrow -4x = 5 \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{5}{4}}}$$

Durch Zurück einsetzen, z.B. in  $\textcircled{1}$ , erhalten wir die zugehörigen  $y$ -Koordinaten (Plural!):

$$(x+1)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 = \frac{63}{16} \Leftrightarrow \underline{\underline{y = \pm \frac{3\sqrt{7}}{4} \approx 1.984}}$$

Somit haben wir zwei Punkte gefunden:  $\underline{\underline{P_1\left(-\frac{5}{4}, \frac{3\sqrt{7}}{4}\right)}}$  und  $\underline{\underline{P_2\left(-\frac{5}{4}, -\frac{3\sqrt{7}}{4}\right)}}$ . Es handelt sich um die Schnittpunkte zweier Kreise, einen mit Radius 2 um den Punkt  $A$  und einen mit Radius 3 um den Punkt  $B$ .

5. Die Gerade  $g$  sei gegeben durch  $g: \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Ausserdem seien zwei Eckpunkte  $A(-2, 1)$  und  $B(10, -\frac{5}{2})$  eines Dreiecks  $ABC$  bekannt.

(a) Liegt  $A$  auf  $g$ , so muss es ein  $r \in \mathbb{R}$  geben, für das  $\vec{A} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Diese Gleichung entspricht einem *überbestimmten* Gleichungssystem mit zwei Gleichungen bei nur einer Unbekannten. Wir überprüfen, ob wir aus beiden Gleichungen zusammen eine wahre Aussage erhalten:

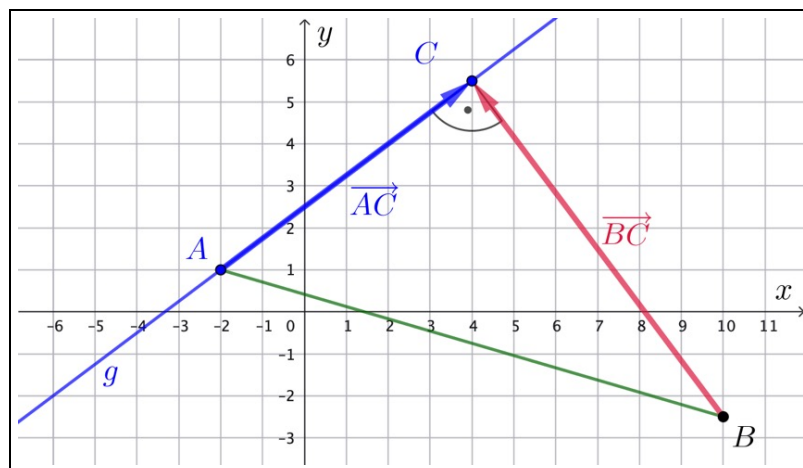
$$\begin{cases} -2 = 2 + 4r \\ 1 = 4 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 6 + 12r \\ -4 = -16 - 12r \end{cases} \Rightarrow -10 = -10 \quad \checkmark$$

Tatsächlich erhalten wir diese wahre Aussage und somit ist  $A \in g$ .

(b)  $A \in g$  bedeutet, dass die Kathete  $\overline{AC}$  auf  $g$  liegt und dass somit der Vektor  $\overrightarrow{AC}$  kollinear zum Richtungsvektor  $\vec{v}_g$  der Gerade  $g$  ist. Die andere Kathete  $\overline{BC}$  resp. der Verbindungsvektor  $\overrightarrow{BC}$  muss senkrecht zu  $\vec{v}_g$  stehen. Das ist die Bedingung, die der Punkt  $C \in g$  zusätzlich zu erfüllen hat. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP}(r) &= \vec{P}_g(r) - \vec{B} = \begin{pmatrix} 2 + 4r \\ 4 + 3r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 4r \\ 13/2 + 3r \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \overrightarrow{BP} \cdot \vec{v}_g &= \begin{pmatrix} -8 + 4r \\ 13/2 + 3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -32 + 16r + \frac{39}{2} + 9r = -\frac{25}{2} + 25r \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow \vec{C} &= \vec{P}_g\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C\left(4, \frac{11}{2}\right)}} \end{aligned}$$

Hier der Vollständigkeit noch die tatsächliche Situation im Koordinatensystem:



6. Wir berechnen zuerst den Vektor  $\overrightarrow{PQ}$  inklusive seinem Betrag:

$$\vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 3 - (-3) \\ 1 - 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5/2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{PQ}| = \sqrt{6^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{144 + 25}{4}} = \frac{13}{2}$$

Somit erhalten wir für den Einheitsvektor in Richtung  $\overrightarrow{PQ}$ :

$$\vec{e}_{PQ} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{|\vec{PQ}|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ -5/2 \end{pmatrix}}{\frac{13}{2}} = \frac{2}{13} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Diesen Einheitsvektor strecken wir jetzt noch auf die gewünschte Länge:

$$\vec{v} = \frac{9}{2} \cdot \vec{e}_{PQ} = \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\frac{9}{26} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

Es ist nicht notwendig, den Vorfaktor  $\frac{9}{26}$  hineinzurechnen, denn so bleibt es zahlenmässig übersichtlicher.

7. (a) Schneiden wir eine Gerade mit einem Kreis, so sind allgemein zwei Schnittpunkte zu erwarten (oder gar keiner, bei ganz allgemeiner Lage von Kreis und Gerade). Mathematisch ist zu vermuten, dass wir hier auf eine quadratische Gleichung stossen. Und genau so ist es:

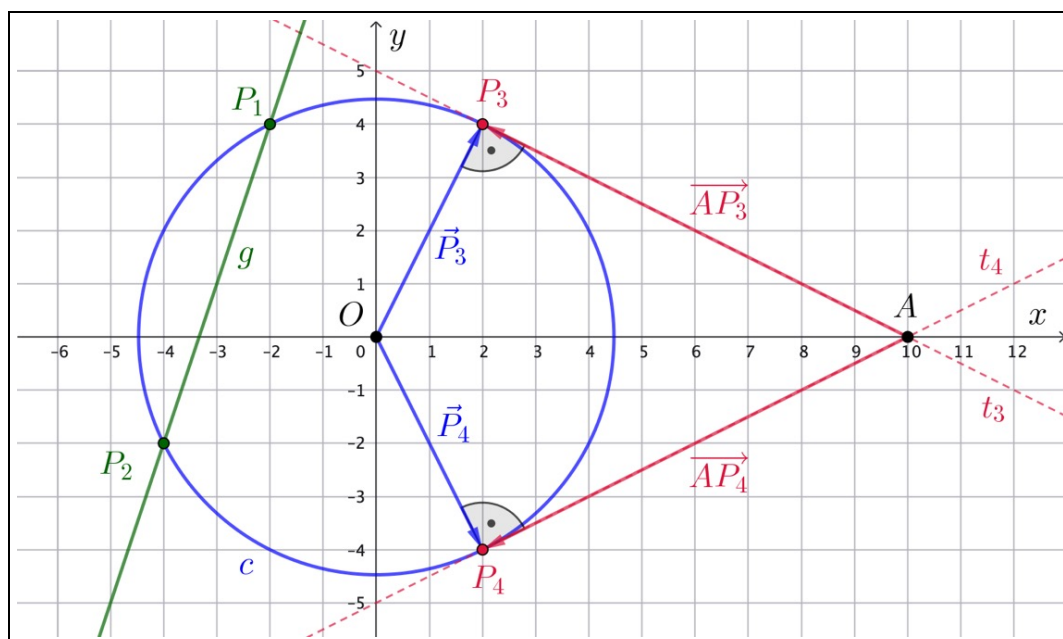
$$g: \vec{P}_g(k) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -1 + k \quad \text{und} \quad y = 7 + 3k$$

$$x^2 + y^2 = 20 \Rightarrow (-1 + k)^2 + (7 + 3k)^2 = 20 \Leftrightarrow 1 - 2k + k^2 + 49 + 42k + 9k^2 = 20$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 4k + 3 = 0 \Leftrightarrow (k + 1)(k + 3) = 0 \Leftrightarrow \underline{k = -1, -3}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{P}_g(-1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}} \quad \text{und} \quad \underline{\vec{P}_g(-3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Wir haben die beiden Schnittpunkte  $\underline{P_1(-2, 1)}$  und  $\underline{P_2(-4, -2)}$  entdeckt, die links in der folgenden Grafik zu sehen sind, zusammen mit der Gerade  $g$ :



- (b) In obiger Grafik sehen wir im rechten Teil zudem die Skizze zu dieser Aufgabe. Die Vektoren  $\vec{P}$  und  $\vec{AP}$  müssen senkrecht aufeinander stehen, wenn  $P$  der Punkt sein soll, in dem die Tangente den Kreis berührt. Daraus folgern wir unter Verwendung des Skalarproduktes:

$$P(x, y) \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{AP} = \vec{P} - \vec{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 10 \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{AP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - 10 \\ y \end{pmatrix} = x^2 - 10x + y^2 \stackrel{!}{=} 0$$

Gleichzeitig muss  $P$  auf dem Kreis  $c$  liegen. Somit haben wir zwei Gleichungen, die zur Bestimmung der Koordinaten  $x$  und  $y$  ausreichen sollten:

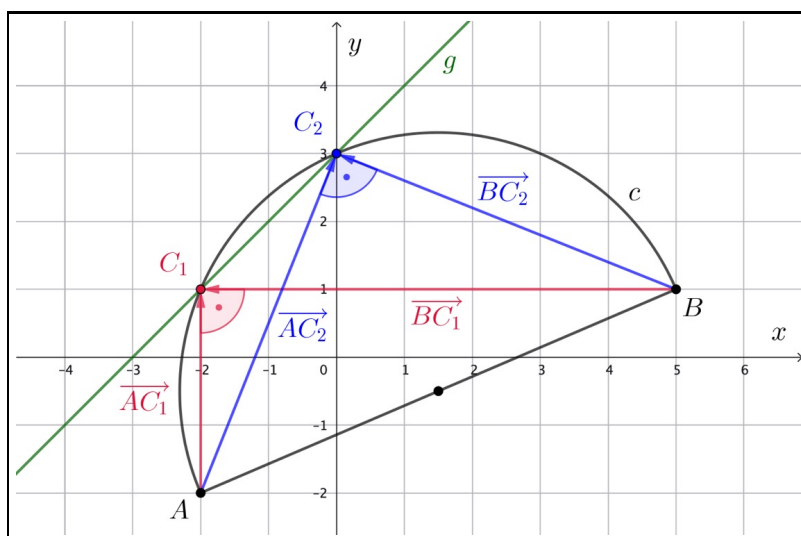
$$\left| \begin{array}{l} x^2 - 10x + y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \Rightarrow \textcircled{2} - \textcircled{1}: \quad 10x = 20 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Zurückeinsetzen in  $\textcircled{2}$  liefert die zugehörigen  $y$ -Koordinaten:

$$2^2 + y^2 = 20 \Rightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$$

Somit haben wir die beiden Berührungspunkte  $\underline{P_3(2, 4)}$  und  $\underline{P_4(2, -4)}$  gefunden.

8. Zunächst skizzieren wir die Situation und stellen fest, dass die Lösungspunkte  $C$  auf dem Thaleskreis über der Strecke  $\overline{AB}$  liegen müssen:



Entscheidend ist die Orthogonalität der Vektoren  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{BC}$ . Sie lassen sich mittels der PD für  $g$  gut notieren und die Orthogonalität liefert uns eine Gleichung für den "richtigen" Parameterwert  $r$ :

$$\begin{aligned}\vec{C} &= \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+r \\ -2+r \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AC} &= \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -5+r \\ -2+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+r \\ r \end{pmatrix} \\ \text{und } \overrightarrow{BC} &= \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} -5+r \\ -2+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+r \\ -3+r \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -3+r \\ r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10+r \\ -3+r \end{pmatrix} = (-3+r)(-10+r) + r(-3+r) \\ &= (-3+r)(-10+2r) = 2(r-3)(r-5) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r=3 \text{ oder } 5}}\end{aligned}$$

Nun finden wir beide Punkte  $C$ :

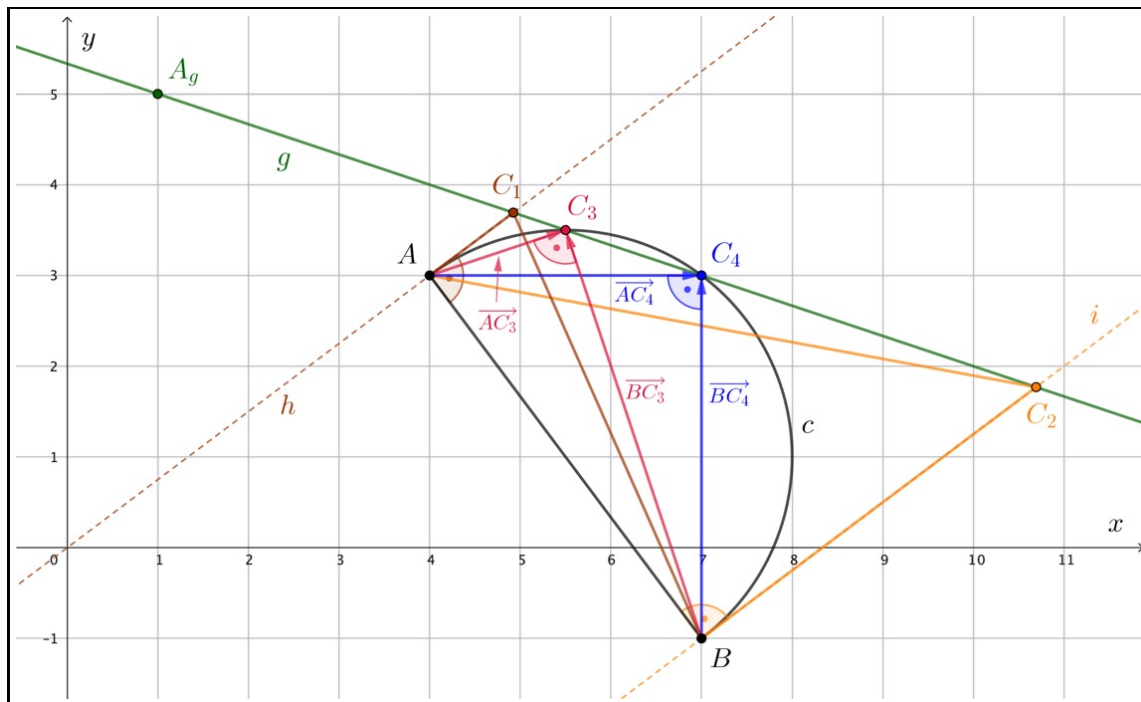
$$\vec{C}_1 = \vec{P}_g(3) = \begin{pmatrix} -5+3 \\ -2+3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \quad \text{und} \quad \vec{C}_2 = \vec{P}_g(5) = \begin{pmatrix} -5+5 \\ -2+5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Das entspricht den Punkten in der Grafik oben. Auch die Flächen der beiden Dreiecke sollen bestimmt werden. Da es sich um rechtwinklige Dreiecke handelt, kann man einfach die beiden Kathetenlängen miteinander multiplizieren und hinterher durch 2 teilen.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}_1 &= \begin{pmatrix} -3+3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}_1| = 3 \quad , \quad \overrightarrow{BC}_1 = \begin{pmatrix} -10+3 \\ -3+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}_1| = 7 \\ \Rightarrow A_1 &= \frac{|\overrightarrow{AC}_1| \cdot |\overrightarrow{BC}_1|}{2} = \frac{3 \cdot 7}{2} = \underline{\underline{\frac{21}{2}}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}_2 &= \begin{pmatrix} -3+5 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{AC}_2| = \sqrt{29} \quad , \quad \overrightarrow{BC}_2 = \begin{pmatrix} -10+5 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BC}_2| = \sqrt{29} \\ \Rightarrow A_2 &= \frac{|\overrightarrow{AC}_2| \cdot |\overrightarrow{BC}_2|}{2} = \frac{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}}{2} = \underline{\underline{\frac{29}{2}}}\end{aligned}$$

9. Auch bei dieser Aufgabe lohnt es sich mit einer Skizze zu starten:



Offensichtlich gibt es eine Lösung mit dem rechten Winkel bei A und eine mit dem rechten Winkel bei B. Diese sind relativ "straight forward" zu ermitteln. Wir bestimmen die PDs der senkrecht zu  $\overline{AB}$  stehenden Geraden  $h$  und  $i$  und schneiden sie mit der Gerade  $g$ :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_h = \vec{v}_i = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{P}_h(r) = \vec{A} + r \cdot \vec{v}_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{P}_i(s) = \vec{B} + s \cdot \vec{v}_i = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$g \cap h: \quad \begin{cases} 1 + 3k = 4 + 4r \\ 5 - k = 3 + 3r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 4r = 3 \\ -3k - 9r = -6 \end{cases} \Rightarrow -13r = -3 \Rightarrow \underline{r = \frac{3}{13}}$$

$$\Rightarrow \vec{C}_1 = \vec{P}_h\left(\frac{3}{13}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{3}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64/13 \\ 48/13 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C_1\left(\frac{64}{13}, \frac{48}{13}\right) \approx (4.9, 3.7)}}$$

$$g \cap i: \quad \begin{cases} 1 + 3k = 7 + 4s \\ 5 - k = -1 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 4s = 6 \\ -3k - 9s = -18 \end{cases} \Rightarrow -13s = -12 \Rightarrow \underline{s = \frac{12}{13}}$$

$$\Rightarrow \vec{C}_2 = \vec{P}_i\left(\frac{12}{13}\right) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{12}{13} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 139/13 \\ 23/13 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{C_2\left(\frac{139}{13}, \frac{23}{13}\right) \approx (10.7, 1.8)}}$$

Diese Resultate entsprechen sichtbar den Punkten  $C_1$  und  $C_2$  in obiger Grafik.

Zur Bestimmung der anderen beiden Punkte  $C_3$  und  $C_4$  gehen wir gleich vor wie in Aufgabe 8. Zunächst geben wir die Vektoren  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{BC}$  für  $C \in g$  in Abhängigkeit des  $g$ -Parameters  $k$  an:

$$\vec{C} = \vec{P}_g(k) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3k \\ 5 - k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AC} = \vec{C} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 1 + 3k \\ 5 - k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 3k \\ 2 - k \end{pmatrix}$$

$$\text{und} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix} 1 + 3k \\ 5 - k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 + 3k \\ 6 - k \end{pmatrix}$$

Im Schnittpunkt von Gerade  $g$  und Thaleskreis  $c$  über  $\overline{AB}$  muss Skalarprodukt der Vektoren  $\overrightarrow{AC}$  und  $\overrightarrow{BC}$  verschwinden:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} -3 + 3k \\ 2 - k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 + 3k \\ 6 - k \end{pmatrix} = (-3 + 3k)(-6 + 3k) + (2 - k)(6 - k) \\ &= 18 - 27k + 9k^2 + 12 - 8k + k^2 = 30 - 35k + 10k^2 = 5(2k - 3)(k - 2) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

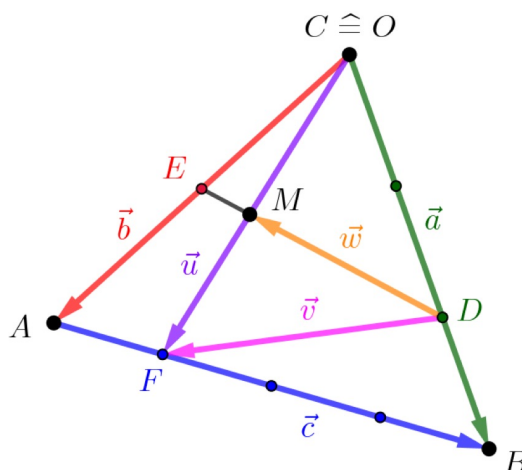
$$\Rightarrow k = \frac{3}{2} \text{ oder } 2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{C}_3 = \vec{P}_g\left(\frac{3}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot \frac{3}{2} \\ 5 - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\vec{C}_4 = \vec{P}_g(2) = \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot 2 \\ 5 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

Auch diese Resultate  $C_3(5.5, 3.5)$  und  $C_4(7, 3)$  passen zur Grafik oben.

10. Die Aufgabe wird als "ziemlich schwierig" angekündigt. Dies bezieht sich vor allem darauf, dass man formal genau arbeiten muss – und dann gibt es einen mathematischen Knackpunkt zu begreifen...

Hier zunächst nochmals die Grafik zur Aufgabe:



Wenn wir es schaffen, den Ortsvektor des Punktes  $M$  durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  auszudrücken, sind wir praktisch fertig.  $M$  ist der Schnittpunkt der Gerade  $g$  durch  $D$  und durch  $E$  und der Gerade  $h$  durch  $O$  und  $F$ . Zu diesen beiden Geraden können wir je eine PD aufstellen, die einzig auf die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  zurückgreift. Der einfachere Fall ist die Gerade  $h$ , weil wir da den Richtungsvektor  $\vec{u}$  bereits aus der Aufgabe 3.(a) kennen und der Aufpunkt der einfachst Mögliche ist, nämlich  $O$ :

$$\vec{P}_h(s) = \vec{O} + s \cdot \vec{u} = s \cdot \left( \frac{3}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{a} \right)$$

Etwas anspruchsvoller, aber immer noch relativ einfach, ist die Formulierung der PD von  $g$ :

$$\vec{P}_g(r) = \vec{D} + r \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{2}{3} \vec{a} + r \cdot (\vec{E} - \vec{D}) = \frac{2}{3} \vec{a} + r \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a} \right)$$

Nun wollen wir den Schnittpunkt  $M$  von  $g$  und  $h$  bestimmen. D.h., wir müssen ihre PDs gleichsetzen:

$$\vec{P}_g(r) = \vec{P}_h(s) \Rightarrow \frac{2}{3} \vec{a} + r \cdot \left( \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{2}{3} \vec{a} \right) = s \cdot \left( \frac{3}{4} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{a} \right)$$

Das sieht nun erstmal vor allem unbekannt und verwirrend aus. Eigentlich kennen wir weder die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  genau, noch die beiden Parameter  $r$  und  $s$ .

Überlegen wir genau:  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sollen im Prinzip zwei beliebige, allerdings nicht-kollineare Vektoren sein. Wir kennen sie nicht genau, müssen sie aber gemäss Aufgabenstellung als gegeben voraussetzen!

Die eigentlichen Unbekannten sind die beiden Parameter  $r$  und  $s$ . Fehlt uns dann aber nicht eine Gleichung?! Wie sollen sich zwei Unbekannte aus lediglich einer Gleichung ermitteln lassen?

Nun kommt der mathematische Knackpunkt, von dem zu Beginn dieser Lösung gesprochen wurde und der in der Aufgabenstellung unter "Vorgehen" angedeutet wird.  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  sind *beliebige* zwei Vektoren. Das bedeutet, zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  darf es grundsätzlich keine feste Beziehung geben, denn sie sind im Prinzip einzeln frei wählbar. Die Gleichung oben scheint aber genau eine solche Beziehung aufzustellen. Das darf aber genau nicht sein. Um diesen scheinbaren Widerspruch aufzulösen, müssen wir fordern, dass sich alle Anteile mit dem Vektor  $\vec{a}$  auf der linken und der rechten Gleichungsseite separat ausgleichen – ebenso alle Anteile mit dem Vektor  $\vec{b}$ . Das bedeutet, die Gleichung lässt sich in zwei separate Gleichungen aufteilen, eine mit dem Vektor  $\vec{a}$  und eine mit dem Vektor  $\vec{b}$ :

$$\frac{2}{3}\vec{a} + r \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = s \cdot \left(\frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a}\right) \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3}\vec{a} - r \cdot \frac{2}{3}\vec{a} = s \cdot \frac{1}{4}\vec{a} \\ r \cdot \frac{1}{2}\vec{b} = s \cdot \frac{3}{4}\vec{b} \end{array} \right|$$

Nun haben wir ein Gleichungssystem für die beiden Parameter  $r$  und  $s$ . Und es kommt noch besser: Aus der oberen Gleichung streicht sich der Vektor  $\vec{a}$  heraus, aus der unteren der Vektor  $\vec{b}$ . D.h., der genaue Wert dieser Vektoren spielt effektiv keine Rolle für die Zusammensetzung des Ortsvektors  $\vec{M}$ .

$$\left| \begin{array}{l} \frac{2}{3}\vec{a} - r \cdot \frac{2}{3}\vec{a} = s \cdot \frac{1}{4}\vec{a} \\ r \cdot \frac{1}{2}\vec{b} = s \cdot \frac{3}{4}\vec{b} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} - r \cdot \frac{2}{3} = s \cdot \frac{1}{4} \\ r \cdot \frac{1}{2} = s \cdot \frac{3}{4} \end{array} \right|$$

Dieses Gleichungssystem können wir wie gewohnt auflösen. Ich ziele von Anfang an auf die Ermittlung des Parameters  $r$  ab, weil dieser zur Gerade  $g$  mit Aufpunkt  $D$  und Richtungsvektor  $\overrightarrow{DE}$  gehört. Wenn wir  $r$  mit diesem Richtungsvektor  $\overrightarrow{DE}$  multiplizieren, erhalten wir direkt den gesuchten Vektor  $\vec{w}$ , der uns von  $D$  nach  $M$  führt:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{2}{3} - r \cdot \frac{2}{3} = s \cdot \frac{1}{4} \\ r \cdot \frac{1}{2} = s \cdot \frac{3}{4} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 8 - 8r = 3s \\ 2r = 3s \end{array} \right| \Rightarrow 8 - 10r = 0 \Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{4}{5}}}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = r \cdot \overrightarrow{DE} = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{5}\vec{b} - \frac{8}{15}\vec{a}}}$$

Der Vollständigkeit halber berechne ich noch rasch den Ortsvektor zum Punkt  $M$  und zeige, dass er kollinear zum Vektor  $\vec{u}$  herauskommt:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \vec{D} + \vec{w} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{8}{15}\vec{a} = \frac{10}{15}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} - \frac{8}{15}\vec{a} \\ &= \frac{2}{15}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} = \frac{8}{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right) = \frac{8}{15}\vec{u} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Tatsächlich hätten wir in der Auflösung des Gleichungssystems oben für den Parameter  $s$  diese  $\frac{8}{15}$  erhalten, denn das ist genau der notwendige Vorfaktor für den Vektor  $\vec{u}$ , um von  $O$  nach  $M$  zu gelangen.