Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE VI: Prüfungsvorbereitung Vektorgeometrie im $\mathbb{R}^2$

Klasse 155c / AGe

1. *Grundlegende Verständnisfragen*

   (a) Was verstehen wir unter einem *Vektor* $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ und worin besteht der Unterschied zwischen einem *Vektor* und einem *Ortsvektor*?

   (b) Was meinen wir genau, wenn wir sagen, dass beispielsweise die Subtraktion zweier Vektoren oder die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar *komponentenweise* erfolgt?

   (c) In den folgenden kurzen Rechnungen kommen Plus-, Minus- und Malzeichen vor. Um welche Operation handelt es sich dabei jeweils? Benenne alle Operationen mit ihrem korrekten Namen! Was für ein Objekt ist das Resultat der Rechnung? Es seien $m, n \in \mathbb{R}$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^2$

   $$m \cdot \vec{a} = ? \qquad (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = ? \qquad (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) = ? \qquad (m+n) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = ? \qquad \vec{c} + m = ?$$

   (d) Wie berechnet sich der Abstand zwischen zwei Punkten P und Q und wie die Länge eines Vektors vom einen zum anderen Punkt?

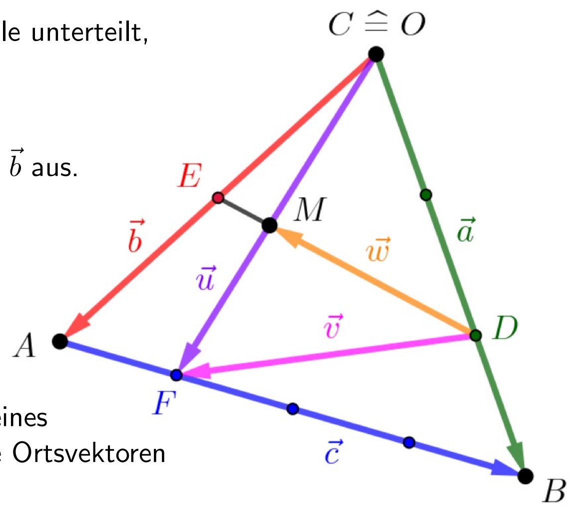
2. Bestimme die relativen Lagen folgender vier Geraden:

   $$f: \quad 2x + \frac{3}{2}y = 5 \qquad\qquad g: \quad y = -\frac{1}{7}x + \frac{40}{7}$$

   $$h: \quad \vec{P}_h(r) = \begin{pmatrix} 10 \\ 5/2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad\qquad i: \quad \vec{P}_i(s) = \begin{pmatrix} 13/2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

   Wenn es einen Schnittpunkt gibt, bestimmst du zusätzlich den spitzen Schnittwinkel. Bei echter Parallelität gibst du den Abstand der beiden Geraden an. Skizziere alle Geraden in einem Koordinatensystem.

3. Beim Dreieck rechts wurde die Seite a in drei gleiche Teile unterteilt, die Seite b halbiert und die Seite c geviertelt.



   (a) Drücke nun den violetten Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{CF}$ als *Linearkombination* der beiden Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus. Finde also die beiden Zahlen $m, n \in \mathbb{R}$, für die gilt:

   $$\vec{u} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$$

   (b) Notiere ebenso den Vektor $\vec{v} = \overrightarrow{DF}$ als Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

   Tipp: Fasse z.B. den Eckpunkt C als Ursprung O eines Koordinatensystems auf und drücke dann zuerst die Ortsvektoren der Punkte D und F durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus.

   N.B.: Die Punkte E und M, sowie der Vektor $\vec{w}$ werden erst in Aufgabe 10 verwendet.

4. Bestimme alle Punkte $P(x, y)$, die von $A(-1, 0)$ den Abstand 2 und von $B(1, 0)$ den Abstand 3 aufweisen.

5. Die Gerade g sei gegeben durch $g: \ \vec{P}_g(r) = \binom{2}{4} + r \cdot \binom{4}{3}$. Ausserdem seien zwei Eckpunkte $A(-2,1)$ und $B(10,-\frac{5}{2})$ eines Dreiecks ABC bekannt.

   (a) Überprüfe, ob der Punkt A auf der Gerade g liegt.

   (b) Bestimme den Eckpunkt $C \in g$ so, dass das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel aufweist.

6. Gegeben seien die beiden Punkte $P(-3,\frac{7}{2})$ und $Q(3,1)$. Wie lautet der Vektor, der von P nach Q zeigt und die Länge $\frac{9}{2}$ aufweist?

   Tipp: Einheitsvektor.

7. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 20$ beschreibt den Kreis c mit Radius $r = \sqrt{20}$ rund um den Ursprung $(0,0)$. Das bedeutet, die Koordinaten jedes Punktes $P(x,y)$ auf c erfüllen diese Gleichung.

   (a) Schneide den Kreis mit der Gerade $g: \ \vec{P}_g(k) = \binom{-1}{7} + k \cdot \binom{1}{3}$.
   Tipp: Setze die durch die PD gegebenen Koordinaten für Punkte auf der Gerade in die Kreisgleichung ein und und bestimme daraus den Wert des Parameters k.

   (b) Zweitens wollen wir eine Tangente an c legen, die durch den Punkt $(10,0)$ auf der x-Achse verläuft. In welchem Punkt $P \in c$ berührt die Tangente den Kreis?
   Tipp: Skizziere dir die Situation und arbeite dann mit den Vektoren $\vec{P} = \binom{x}{y}$ und $\vec{P} - \binom{10}{0} = \ \ldots$

8. **Anspruchsvoller:** Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den beiden bekannten Eckpunkten $A(-2,-2)$ und $B(5,1)$ liegt der Eckpunkt C, bei dem sich der rechte Winkel befindet, auf der Gerade g, die durch $g: \ \vec{P}_g(r) = \binom{-5}{-2} + r \cdot \binom{1}{1}$ gegeben ist.

   Bestimme den Punkt C sowie die Fläche des Dreiecks.

   Hilfe: Zeichne eine grobe Skizze und mache dir klar, dass es zwei solche Punkte C geben kann (Stichwort: *Thaleskreis*). Überlege dir nun, welche Bedingung der Punkt C erfüllen muss. (Stichwort: *Skalarprodukt*!)

9. **Anspruchsvoller:** Gegeben sei die Gerade $g: \ \vec{P}_g(k) = \binom{1}{5} + k \cdot \binom{3}{-1}$, sowie die beiden Punkte $A(4,3)$ und $B(7,-1)$.

   Bestimme alle Punkte $C \in g$, für die das Dreieck ABC rechtwinklig wird.

   Hinweis: Dies ist fast eine Kopie der vorherigen Aufgabe. Allerdings gibt es hier mehr Lösungsmöglichkeiten, weil die Aufgabe offener formuliert ist...

10. **Ziemlich schwierig!** Gehe zurück zur Grafik in Aufgabe 3. Gib dort den orangen Vektor $\vec{w}$ als Linearkombination der beiden Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ an.

    Vorgehen: Zur Bestimmung von M muss die Gerade durch C und F mit derjenigen durch D und E geschnitten werden. Notiere diese beiden Geraden je mit einer PD und setze diese PDs dann gleich. Zunächst sieht es dann so aus, als hätten wir nur eine einzige Gleichung für beide Parameter, mit denen die beiden PDs formuliert wurden. Diese Gleichung enthält aber eigentlich zwei Gleichungen. Weil die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ voneinander unabhängig sind, müssen sich alle Glieder mit $\vec{a}$ ausgleichen. Dasselbe gilt für alle Glieder mit $\vec{b}$. Aus diesen zwei separaten Gleichungen lassen sich dann die Parameterwerte für M bestimmen.