

Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie VII

1. (a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow C$ zwischen A und B mit $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$.
- (b) $\overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{KM} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{KL} = -\frac{4}{3} \cdot \overrightarrow{KM} \Rightarrow K$ zwischen L und M mit $\overline{LK} : \overline{KM} = 4 : 3$.
- (c) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ nicht kollinear $\Rightarrow A, B$ und C **nicht auf einer Geraden**.

2. (a) g und h liegen **windschief** zueinander.
 (b) g und h liegen **windschief** zueinander.
 (c) g und h **schneiden sich** in $S(2, -1, 3)$ ($s = -1, t = 0$).
 (d) g und h sind **identisch**.

3. Von der gesuchten Gerade benötigen wir nur noch den Richtungsvektor \vec{v} . Dieser muss senkrecht zu den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehen.

Damit ist aber noch nicht definiert, wie lange dieser Richtungsvektor wird. Diese Länge ist ja für die Angabe eines Richtungsvektors einer Geraden auch gar nicht vorgeschrieben. Wir dürfen seine Länge (und seine Zeigerichtung "vorwärts" oder "rückwärts" längs der Gerade) frei wählen.

Für unseren Ansatz bedeutet dies, dass wir eine Komponente von \vec{v} selber festlegen dürfen – alles außer 0 ist erlaubt. Somit wähle ich zunächst z.B. $z = 1$ und erhalte damit für die beiden anderen Komponenten:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{v} \stackrel{!}{=} 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{v} \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + 5y + 3 = 0 & \textcircled{1} \\ -3x - 6y + 2 = 0 & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$3 \cdot \textcircled{1} - \textcircled{2}: \quad 21y + 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{y = -\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \text{in } \textcircled{1}: \quad -x - \frac{5}{3} + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{x = \frac{4}{3}}$$

Notieren wir damit den Richtungsvektor, den wir in der Regel gleich noch so skalieren, dass seine Komponenten ganze Zahlen mit möglichst kleinen Beträgen sind:

$$k \cdot \vec{v} = k \cdot \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{g: \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

4. (a) Kümmern wir uns zunächst um die Parallelität. Dafür müssen die beiden Richtungsvektoren kollinear sein. Wie wir aus den x - und den z -Komponenten sehen, ist das möglich. Der Skalierungsfaktor vom einen zum anderen Vektor ist -1 . Damit muss $a = -1$ sein.

Für $a = -1$ wird die x -Komponente des Aufvektors von g zu 3 und die y -Komponente des Aufvektors von h zu -1 . Nun können wir die Identität überprüfen:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der z -Komponente folgt sofort, dass für die Gleichheit $s = -1$ sein muss. Das passt zwar auch bei der x -, nicht aber bei der y -Komponente. Somit sind die beiden Geraden **echt parallel**.

- (b) Aus dem Skalarprodukt der beiden Richtungsvektoren erhalten wir sofort:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + a - 4 = a - 8 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 8}}$$

- (c) Wir setzen direkt die Schnittpunktgleichung an und lösen. Dabei ist a einfach ein weiterer Parameter, dessen Wert wir zu ermitteln haben. Allerdings kommt a quadratisch vor, sodass es bis zu zwei Lösungen geben kann. Wir müssen zuerst s und t eliminieren, um dann eine quadratische Gleichung für a zu erhalten:

$$\begin{cases} 2 + a^2 + 2s = 1 - 2t \\ 2 + s = a + at \\ -2s = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + a^2 + 2s = 1 - 2t \\ s = -2 + a + at \\ -s = 1 + t \end{cases} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3}: 0 = -1 + a + at + t \Leftrightarrow 1 - a = at + t \Leftrightarrow t = \frac{1 - a}{1 + a}$$

$$t \text{ in } \textcircled{3}: -s = 1 + \frac{1 - a}{1 + a} = \frac{1 + a + 1 - a}{1 + a} = \frac{2}{1 + a} \Rightarrow s = -\frac{2}{1 + a}$$

$$s, t \text{ in } \textcircled{1}: 2 + a^2 - \frac{4}{1 + a} = 1 - \frac{2 - 2a}{1 + a} \Rightarrow (2 + a^2)(1 + a) - 4 = 1 + a - (2 - 2a)$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2a + a^2 + a^3 - 4 = 1 + a - 2 + 2a \Leftrightarrow a^3 + a^2 - a - 1 = 0$$

Nun ist sogar eine kubische Gleichung in a entstanden. Diese hat maximal drei Lösungen und in der Regel können wir sie nur mit Glück lösen. Diese Glück haben wir hier allerdings! Wir können faktorisieren:

$$a^3 + a^2 - a - 1 = (a + 1)(a^2 - 1) = (a + 1)^2(a - 1) \stackrel{!}{=} 0$$

$a = -1$ ist keine echte Lösung. Sie ist weiter oben hinzugekommen, als wir mit $a + 1$ multipliziert hatten. Schliesslich wissen wir ja auch schon aus Aufgabe (a), dass die beiden Geraden für $a = -1$ echt parallel sind.

Als einzige Lösung kommt somit $a = 1$ in Frage. Für den Schnittpunkt erhalten wir:

$$s = -\frac{2}{1 + a} = -\frac{2}{1 + 1} = -1 \Rightarrow \vec{S} = \begin{pmatrix} 2 + 1^2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(5, 3, -2)}}$$

Weiter folgt für den Schnittwinkel (beide Richtungsvektoren haben den Betrag 3):

$$\varphi = \arccos \frac{2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2}{3^2} = \arccos \frac{-7}{9} \stackrel{\text{TR}}{\approx} \underline{\underline{141.1^\circ}}$$

Natürlich wäre auch der spitze Winkel $\vartheta = 180^\circ - \varphi \approx \underline{\underline{38.9^\circ}}$ korrekt.

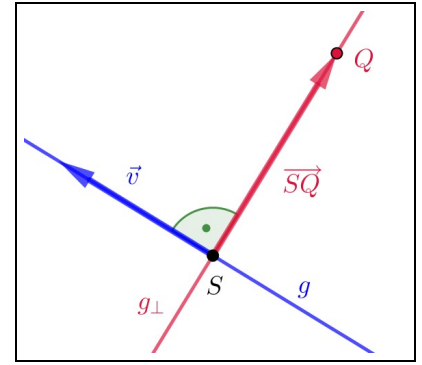
- (d) Für alle Werte $a \neq \pm 1$, also $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, sind die beiden Geraden windschief zueinander.

Begründung: Windschief heisst ja "weder parallel noch sich schneidend". Orthogonalität ist erlaubt. Somit können wir aufgrund unserer Resultat aus (a) und (c) die Frage vollständig beantworten.

5. Ist S der Schnittpunkt von g und seiner Senkrechten g_{\perp} , so muss der Vektor \overrightarrow{SQ} einem Richtungsvektor von g_{\perp} entsprechen und somit senkrecht zum Richtungsvektor von g stehen.

Allerdings kennen wir S nicht. Obige Überlegung ist aber unser Kriterium um S aufzuspüren. Schliesslich lässt sich $S \in g$ mittels der PD von g notieren und damit lässt sich arbeiten:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \begin{pmatrix} -20 + 7t \\ 10 - 3t \\ 8 - t \end{pmatrix} &\Rightarrow \overrightarrow{SQ} = \vec{Q} - \vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -20 + 7t \\ 10 - 3t \\ 8 - t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 20 - 7t \\ -2 - 10 + 3t \\ 0 - 8 + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 - 7t \\ -12 + 3t \\ -8 + t \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Dieser Vektor \overrightarrow{SQ} muss senkrecht stehen auf dem Richtungsvektor \vec{v} von g , sodass folgt:

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \overrightarrow{SQ} &= \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19 - 7t \\ -12 + 3t \\ -8 + t \end{pmatrix} = 7(19 - 7t) - 3(-12 + 3t) - (-8 + t) \\ &= 133 - 49t + 36 - 9t + 8 - t = 177 - 59t \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{t = 3} \end{aligned}$$

Damit sind wir nun aber fertig, denn mit $t = 3$ ergibt sich sofort:

$$\overrightarrow{SQ} = \begin{pmatrix} 19 - 21 \\ -12 + 9 \\ -8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{g_{\perp} : \vec{P}_{g_{\perp}}(s) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

Man darf die Minuszeichen im Richtungsvektor auch so ins Resultat mitnehmen, aber tendentiell ist das Resultat so einfach etwas schöner notiert.

6. Für die PD der Gerade g durch B und C erhalten wir:

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g : \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

F sei der Fusspunkt des Lots, das vom Punkt A auf die Gerade g gefällt werden muss, um den Abstand zu bestimmen. Da F auf g liegt, setzen wir für \vec{F} und daraus folgend für den Abstandsvektor \overrightarrow{FA} an:

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} 3 + t \\ 2 - 2t \\ -4 + 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{FA} = \vec{A} - \vec{F} = \begin{pmatrix} 7 - 3 - t \\ 2 - 2 + 2t \\ 0 + 4 - 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - t \\ 2t \\ 4 - 2t \end{pmatrix}$$

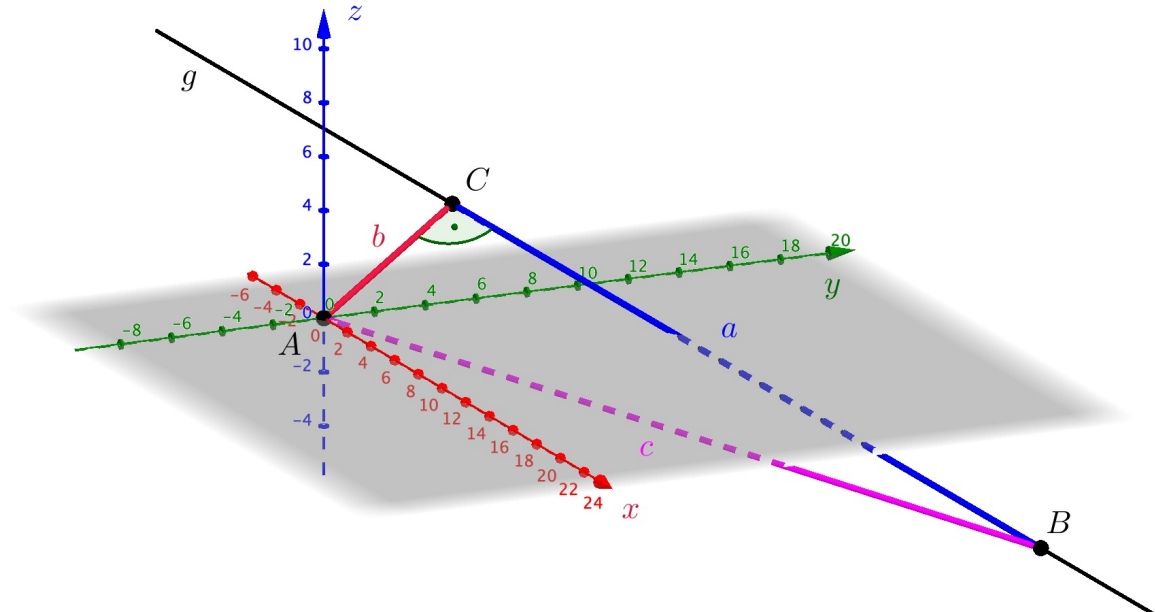
Dieser Abstandsvektor \overrightarrow{FA} muss im Falle des kürzesten Abstandes senkrecht zum Richtungsvektor \vec{v} von g stehen, woraus wir folgern:

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{FA} = 1(4 - t) - 2 \cdot 2t + 2(4 - 2t) = 4 - t - 4t + 8 - 4t = 12 - 9t \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \underline{t = \frac{4}{3}}$$

Mit diesem Wert für t ergibt sich für den Abstandsvektor und schliesslich für den Abstand:

$$\overrightarrow{FA} = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{3} \\ 2 \cdot \frac{4}{3} \\ 4 - 2 \cdot \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{FA}| = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \frac{4}{3} \cdot 3 = \underline{\underline{4}}$$

7. Hier die geschilderte Situation in der 3D-Ansicht:



Der Eckpunkt A des Dreiecks sitzt im Ursprung. Die Strecke von dort zum Punkt $B(22, 18, -5)$ soll die Hypotenuse c des rechtwinkligen Dreiecks sein. Die Kathete a soll auf der Geraden g liegen. Folglich muss sich auf dieser Geraden auch der Eckpunkt C mit dem rechten Winkel befinden.

Wie wir nun erkennen, müssen wir nach dem Punkt $C \in g$ suchen, der so zu liegen hat, dass die Seite b senkrecht auf der Geraden g steht. Das bedeutet, der Ortsvektor $\vec{C} = \overrightarrow{AC}$ muss senkrecht zum Richtungsvektor \vec{v} der Gerade g stehen.

C liegt auf der Gerade g , sodass wir für \vec{C} mittels der PD von g ansetzen:

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 22 - 6t \\ 18 - 3t \\ -5 + 2t \end{pmatrix}$$

Dieser Vektor muss senkrecht zum Richtungsvektor von g stehen, woraus folgt:

$$\vec{v} \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 - 6t \\ 18 - 3t \\ -5 + 2t \end{pmatrix} = -6(22 - 6t) - 3(18 - 3t) + 2(-5 + 2t) = 196 - 49t \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \underline{t = 4}$$

Somit finden wir für C und die Länge der Kathete b :

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} 22 - 24 \\ 18 - 12 \\ -5 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad b = |\vec{C}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$$

Weiter ergibt sich für die Kathete a :

$$\overrightarrow{BC} = t \cdot \vec{v} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a = |\overrightarrow{BC}| = 4 \cdot \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 4\sqrt{49} = 4 \cdot 7 = 28$$

Schliesslich erhalten wir für die Dreiecksfläche ("Kathete mal Kathete durch 2"):

$$\text{Fläche} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{28 \cdot 7}{2} = 14 \cdot 7 = \underline{\underline{98}}$$