Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE VII: Geraden im dreidimensionalen Raum

Klasse 155c / AGe

1. Beurteile jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen. Falls ja, welcher Punkt liegt zwischen den beiden anderen und in welchem Verhältnis unterteilt er die Strecke zwischen diesen?
   (a) $A(2,1,4)$, $B(5,7,1)$, $C(3,3,3)$.
   (b) $K(-2,4,5)$, $L(6,-4,17)$, $M(-8,10,-4)$.
   (c) $P(2,1,5)$, $Q(6,7,1)$, $R(3,3,4)$.

2. Beurteile die relativen Lagen der folgenden Geradenpaare im $\mathbb{R}^3$ (inkl. ev. Schnittpunkt und -winkel):

   (a) $$g:\ \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$$

   (b) $$g:\ \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-3\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-5\end{pmatrix}$$

   (c) $$g:\ \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix}1\\0\\5\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

   (d) $$g:\ \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\9\\-6\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

3. Es seien $\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\2\end{pmatrix}$.

   Wie lautet die PD einer Gerade g, die durch $(0,-10,0)$ verläuft und senkrecht zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ steht?

4. In Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$ sind folgende beiden Geraden gegeben:

   $$g:\ \vec{P}_g(s) = \begin{pmatrix}2+a^2\\2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\ \vec{P}_h(t) = \begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\a\\2\end{pmatrix}$$

   (a) Für welche Werte von a sind g und h parallel? Sind g und h dann identisch oder echt parallel?
   (b) Für welche Werte von a stehen die beiden Richtungsvektoren orthogonal zueinander?
   (c) Für welche Werte von a schneiden sich a und h? Schnittpunkt? Schnittwinkel? (`TR`)
   (d) Für welche Werte von a sind g und h windschief zueinander?

5. Bestimme die PD der **Senkrechten** zu $g:\ \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix}-20\\10\\8\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}7\\-3\\-1\end{pmatrix}$ durch $Q(-1,-2,0)$.

   Bem.: Im Ausdruck "Senkrechte zu g" ist enthalten, dass sich diese beiden Geraden schneiden!

6. Wie gross ist der Abstand des Punktes $A(7,2,0)$ zur Gerade g durch die Punkte $B(3,2,-4)$ und $C(6,-4,2)$?

7. Gegeben sei die Gerade $g:\ \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix}22\\18\\-5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-6\\-3\\2\end{pmatrix}$.

   Die Strecke zwischen dem Ursprung und obigem Aufpunkt sei die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete auf g liegt. Wie gross ist die Dreiecksfläche? (Skizze!)