

Übungen zur Vektorgeometrie – Lösungen Serie VIII

1. Schneiden wir eine Ebene und eine Gerade, so wird es im Normalfall genau einen Durchstoßpunkt geben. Mathematisch erwarten wir ein Gleichungssystem mit einer eindeutigen Lösung...

Die Durchstoßpunkte bestimmen sich durch Gleichsetzen der PDs für Gerade und Ebene und somit durch das Lösen eines linearen 3x3-Gleichungssystems. Ich zeige die Aufgabe (a) ausführlich vor:

$$(a) \quad \begin{cases} 3 + 2r = 2 - s + 2t & \textcircled{1} \\ 15 + 4r = 1 - t & \textcircled{2} \\ 1 + r = -3 + 3s + t & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot \textcircled{1} + \textcircled{3}: \\ \textcircled{2}: \end{array} \begin{cases} 10 + 7r = 3 + 7t \\ 15 + 4r = 1 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + r = t & \textcircled{4} \\ 14 + 4r = -t & \textcircled{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \textcircled{4} + \textcircled{5}: \quad 15 + 5r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r = -3}$$

Die Parameter s und t müssen nicht berechnet werden, wenn einfach der Schnittpunkt zu bestimmen ist, denn r ist der Parameter der Gerade g und führt uns mittels der PD von g direkt zum Schnittpunkt:

$$\vec{S} = \vec{P}_g(-3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(-3, 3, -2)}}$$

Die Aufgaben (b) und (c) funktionieren grundsätzlich genau gleich:

$$(b) \quad \begin{cases} 3 + 3r = -7 - 4s + 2t & \textcircled{1} \\ -13 + r = 3 - s - 3t & \textcircled{2} \\ 8 - 3r = 4 + 5s + 3t & \textcircled{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 \cdot \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{2}: \\ \textcircled{2} + \textcircled{3}: \end{array} \begin{cases} -17 + 11r = -15 - 14s \\ -5 - 2r = 7 + 4s \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11r = 2 - 14s & \textcircled{4} \\ -r = 6 + 2s & \textcircled{5} \end{cases} \Rightarrow \quad \textcircled{4} + 7 \cdot \textcircled{5}: \quad 4r = 44 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{r = 11}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{P}_g(11) = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} + 11 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ -2 \\ -25 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(36, -2, -25)}}$$

$$(c) \quad \begin{cases} -3 - r = -s + 2t & \textcircled{1} \\ 1 + r = 2 - 3s + 2t & \textcircled{2} \\ 3 + 3r = 1 + 4s - 7t & \textcircled{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + s - 2t = 3 & \textcircled{1} \\ r + 3s - 2t = 1 & \textcircled{2} \\ 3r - 4s + 7t = -2 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{2} - 3 \cdot \textcircled{1}: \\ \textcircled{3} + 4 \cdot \textcircled{1}: \end{array} \begin{cases} 4r + 4t = -8 \\ -r - t = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r + t = -2 \\ r + t = -10 \end{cases} \Rightarrow \quad -2 = -10 \quad \nabla$$

Offensichtlich lässt sich das Gleichungssystem (c) nicht lösen. Die Gerade g schneidet die Ebene E nicht. Vielmehr verläuft g parallel zu E !

2. Der Richtungsvektor von g kann auch als Richtungsvektor von E verstanden werden. Einen zweiten Richtungsvektor erhalten wir aus der Differenz der Ortsvektoren von Q und dem Aufpunkt von g :

$$\vec{v} = \overrightarrow{QA} = \vec{A} - \vec{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Ob wir \vec{Q} oder \vec{A} als Aufvektor von E verwenden, spielt keine Rolle. Hier die Variante mit Q :

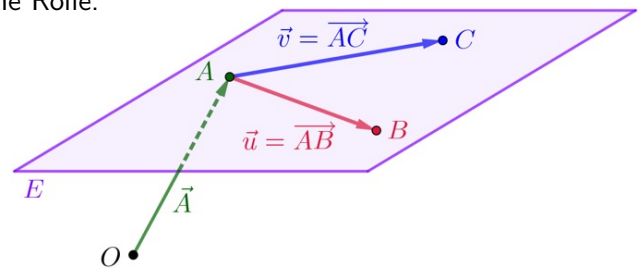
$$\underline{\underline{E: \quad \vec{P}_E(r, s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}}}$$

3. Wir benötigen bei jeder Ebene zwei Richtungsvektoren, die sich als Ortsvektordifferenzen ergeben. Welchen der drei Punkte man als Aufpunkt versteht, spielt keine Rolle:

$$(a) \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E: \underline{\underline{\vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$



$$(b) \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-4 \\ -5-2 \\ 1-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{v} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 6-2 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad E: \underline{\underline{\vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

4. (a) Als Richtungsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z können die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen verwendet werden und als Aufpunkt dient der Einfachheit halber der Ursprung selbst:

$$E_1 (= x-y\text{-Ebene}): \quad \vec{P}_1(r,s) = \vec{O} + r \cdot \vec{e}_x + s \cdot \vec{e}_y = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 (= x-z\text{-Ebene}): \quad \vec{P}_2(r,s) = \vec{O} + r \cdot \vec{e}_x + s \cdot \vec{e}_z = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 (= y-z\text{-Ebene}): \quad \vec{P}_3(r,s) = \vec{O} + r \cdot \vec{e}_y + s \cdot \vec{e}_z = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (b) Nun verwenden wir einfach den Punkt P als Aufpunkt:

$$E_4: \quad \underline{\underline{\vec{P}_4(r,s) = \vec{P} + r \cdot \vec{e}_x + s \cdot \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

- (c) Da E_5 eine Ursprungsgerade enthält, wählen wir der Einfachheit halber den Nullvektor \vec{O} als Aufvektor. Die beiden Richtungsvektoren sind der Einheitsvektor \vec{e}_z , der senkrecht auf der x - y -Ebene steht, sowie der Ortsvektor zum Punkt $B(3,1,0)$:

$$E_5: \quad \underline{\underline{\vec{P}_5(r,s) = \vec{O} + r \cdot \vec{e}_z + s \cdot \vec{B} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

- (d) Die Winkelhalbierende des 1. Quadranten der y - z -Ebene verläuft durch den Ursprung O . Zu ihr gehört die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sodass sie in der y - z -Ebene bleibt, aber eben mittig in den 1. Quadranten hineinsticht. Die x -Achse steht senkrecht auf der y - z -Ebene. Ihr Einheitsvektor \vec{e}_x kann somit als Richtungsvektor von E_6 verwendet werden:

$$E_6: \vec{P}_6(r, s) = \vec{O} + r \cdot \vec{e}_x + s \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (e) Ein Punkt in der x - y -Ebene hat die z -Koordinate 0. Damit ist klar, wie sich der zugehörige Spurpunkt aus der PD von g berechnen lässt:

$$x = 3 + r \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = -3 \Rightarrow \vec{S}_{xy} = \vec{P}_g(-3) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

In gleicher Weise lassen sich die beiden anderen Spurpunkte bestimmen:

$$y = -1 + 2r \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = \frac{1}{2} \Rightarrow \vec{S}_{xz} = \vec{P}_g\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 7/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}}}$$

$$z = 2 - r \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow r = 2 \Rightarrow \vec{S}_{yz} = \vec{P}_g(2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

5. Wir versuchen, wie schon unter Aufgabe 1 den Schnittpunkt zu bestimmen:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} 8 = 3 + 3s - 2t \\ -7 + 4r = -s + 2t \\ 17 - 5r = 7 + 2s - 3t \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -3s + 2t = -5 \\ 4r + s - 2t = 7 \\ 5r + 2s - 3t = 10 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \\ \Rightarrow \begin{array}{l} \textcircled{1} + \textcircled{2}: \\ 3 \cdot \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{3}: \end{array} \left| \begin{array}{l} 4r - 2s = 2 \\ 10r - 5s = 5 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2r - s = 1 \\ 2r - s = 1 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \end{array}$$

Wir erhalten zwei identische Gleichungen $\textcircled{3}$ und $\textcircled{4}$, aus denen sich nur eine Beziehung zwischen zwei Parametern ablesen lässt. So können wir beispielsweise s durch r ausdrücken: $s = 2r - 1$. Durch Zurücksetzen können wir auch t in Abhängigkeit von r formulieren:

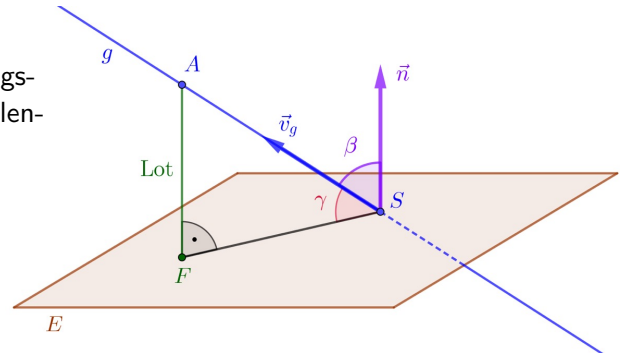
$$\text{in } \textcircled{1}: -3(2r - 1) + 2t = -5 \Leftrightarrow -6r + 3 + 2t = -5 \Leftrightarrow t = 3r - 4$$

Aber welchen Wert darf man nun für r einsetzen? Offenbar gibt es keine Einschränkungen! Wir müssen folgern, dass jeder Wert von r erlaubt ist. Das kann aber nur bedeuten, dass die Gerade g in der Ebene E enthalten ist. Jeder Punkt auf g ist auch ein Punkt in E . Wir schreiben kurz: $\underline{\underline{g \in E}}$.

Sobald ich mir ein bestimmtes r vorgebe, gehört dazu ein ganz bestimmtes Parameterpaar (s, t) . Es sind aber nicht beliebige Parameterpaare (s, t) erlaubt! Die drei Parameter sind voneinander abhängig. Jeder "Schnittpunkt" muss schliesslich auf der Gerade g liegen.

6. (a) Diese Aufgabe lässt sich auf zwei Arten lösen. Zunächst könnte man denken, dass einfach die beiden Punkte S und F zu bestimmen sind, um hinterher mit den Vektoren \vec{SA} und \vec{SF} den Winkel γ zu berechnen. Das funktioniert, ist rechnerisch aber sehr aufwändig. Eigentlich geht es bei der Winkelberechnung ja nur um Richtungen resp. um Richtungsvektoren, nicht um die Berechnung von Punkten. Ich zeige nun zuerst die effiziente Variante vor, die nur mit den Richtungen arbeitet, und hinterher aber zum Vergleich auch noch die mühsamere Variante mit den Punkten.

Variante 1 (effizient): Wie die Grafik rechts zeigt, ist β der Winkel zwischen dem Richtungsvektor \vec{v}_g und dem zum Lot parallelen Normalenvektor \vec{n} . Kennen wir β , so ist der gesuchte Winkel γ rasch bestimmt: $\gamma = 90^\circ - \beta$. Es geht nun also vor allem darum, einen Normalenvektor \vec{n} zur Ebene zu ermitteln. Dieser steht senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene. Es folgt:



$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{AF} & \stackrel{!}{=} & 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{AF} & \stackrel{!}{=} & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - 3y + 2z = 0 \\ -2x + y - 4z = 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow -5y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ und } x = -2z$$

Das unterbestimmte Gleichungssystem hat keine eindeutige Lösung, denn schliesslich legen wir nur die Richtung des Normalenvektors \vec{n} eindeutig fest, nicht aber dessen Betrag. Diesbezüglich haben wir Wahlfreiheit und dürfen eine Komponente nach Belieben festlegen – wobei hier $y = 0$ allerdings fix ist! Damit sich möglichst einfache Zahlen ergeben, wähle ich $z = -1$:

$$z = -1 \Rightarrow x = -2z = 2 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Jetzt ermitteln wir den Winkel β , wobei wir durch die Verwendung des Skalarproduktbetrags sicherstellen, dass sich der spitze Winkel ergibt (\vec{v}_g und \vec{n} müssen ja nicht unbedingt auf dieselbe Seite von E zeigen – das wissen wir a priori aber nicht). Im Anschluss lässt sich dann sofort der gesuchte Winkel γ bestimmen:

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_g|}{n \cdot v_g} = \frac{|2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot 29} = \sqrt{\frac{5}{29}}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos \sqrt{\frac{5}{29}} = 65.5^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 24.5^\circ}}$$

Wenn wir schauen, wie wenig es bei dieser Methode zu rechnen gab, dann ist das schon eine sehr gute Methode (die dank des Vektorproduktes, das wir bald kennenlernen werden nochmals optimiert werden kann).

Variante 2 (umständlich): Wenn wir unbedingt mit den Punkten S und F arbeiten wollen, so gibt das richtig viel zu tun, denn einen Schnittpunkt zwischen einer Ebene und einer Geraden zu bestimmen, die je durch eine PD gegeben sind, erfordert die Lösung eines 3×3 -Gleichungssystems – und bei dieser Aufgabe müssen wir dies sogar zweimal machen. . . Wir beginnen mit dem Schnittpunkt S :

$$g \cap E: \begin{vmatrix} 7 + 4t = -3 + m - 2n \\ -1 + 2t = -3 - 3m + n \\ 3 + 3t = -2 + 2m - 4n \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4t - m + 2n = -10 \\ 2t + 3m - n = -2 \\ 3t - 2m + 4n = -5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{matrix}$$

$$\begin{array}{l} \textcircled{1} + 2 \cdot \textcircled{2}: \quad \left| \begin{array}{l} 8t + 5m = -14 \\ 11t + 10m = -13 \end{array} \right| \begin{array}{l} \textcircled{4} \\ \textcircled{5} \end{array} \Rightarrow \quad \textcircled{5} - 2 \cdot \textcircled{4}: \quad -5t = 15 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t = -3} \\ \Rightarrow \quad \vec{S} = \vec{P}_g(-3) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix}}} \end{array}$$

Zur Bestimmung des Lotes könnten wir nun auch den Normalenvektor \vec{n} bestimmen, wie das im Rahmen der effizienteren Variante 1 gemacht wurde, um anschliessend eine PD der Senkrechten durch A anzusetzen und dann den Fusspunkt F als Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der Ebene E zu ermitteln.

Ich gehe hier allerdings nochmals anders vor, damit wir möglichst viele Varianten zu sehen bekommen: Der Vektor \overrightarrow{AF} muss senkrecht zu beiden Richtungsvektoren der Ebene E stehen! Diese zwei Orthogonalitäten müssten ausreichen, um F zu bestimmen, denn der Punkt F lässt sich ja – wie alle anderen Punkte der Ebene E – mittels der beiden Parameter s und t notieren. Parametrisieren wir also F mittels der PD von E :

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} -3 + m - 2n \\ -3 - 3m + n \\ -2 + 2m - 4n \end{pmatrix}$$

Damit folgt für den Lotvektor \overrightarrow{AF} :

$$\overrightarrow{AF} = \vec{F} - \vec{A} = \begin{pmatrix} -3 + m - 2n \\ -3 - 3m + n \\ -2 + 2m - 4n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 + m - 2n \\ -2 - 3m + n \\ -5 + 2m - 4n \end{pmatrix}$$

Dieser Lotvektor muss senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren von E stehen, woraus folgt:

$$\begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AF} \stackrel{!}{=} 0 \\ \vec{v} \cdot \overrightarrow{AF} \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 1(-10 + m - 2n) - 3(-2 - 3m + n) + 2(-5 + 2m - 4n) \stackrel{!}{=} 0 \\ -2(-10 + m - 2n) + 1(-2 - 3m + n) - 4(-5 + 2m - 4n) \stackrel{!}{=} 0 \end{array} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -14 + 14m - 13n = 0 \\ 38 - 13m + 21n = 0 \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -182 + 182m - 169n = 0 \\ 532 - 182m + 294n = 0 \end{array} \right| \Rightarrow \quad 350 + 125n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad s = -\frac{350}{125} = -\frac{14}{5} \Rightarrow \quad -14 + 14m + 13 \cdot \frac{14}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{5 - 13}{5} = -\frac{8}{5} \end{array}$$

Nun erhalten wir für den Fusspunkt F :

$$\vec{F} = \vec{P}_1 \left(-\frac{8}{5}, -\frac{14}{5} \right) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{8}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{14}{5} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + \frac{20}{5} \\ -3 + \frac{10}{5} \\ -2 + \frac{40}{5} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}}}$$

Nun können wir endlich die Richtung \vec{w} von \overrightarrow{SF} berechnen:

$$\overrightarrow{SF} = \vec{F} - \vec{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \underline{\underline{\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

Somit folgt für den gesuchten Winkel γ :

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{v}_g|}{w \cdot v_g} = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{12}{\sqrt{6} \cdot 29} \Rightarrow \quad \gamma = \arccos \left(\frac{12}{\sqrt{6} \cdot 29} \right) = \underline{\underline{24.5^\circ}}$$

Das ist offensichtlich eine unglaublich mühsame und fehleranfällige Lösungsvariante!

(b) Bei (b) benutze ich nun nur noch die effiziente Variante 1:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{u} \cdot \vec{AF} \stackrel{!}{=} 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{AF} \stackrel{!}{=} 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x + 2y + 0 = 0 \\ -x + 4y + 3z = 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 6y + 3z = 0 \Leftrightarrow z = -2y \Rightarrow \text{Setze willkürlich: } \underline{y = -1} \Rightarrow \underline{z = 2}$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{v}_g|}{n \cdot v_g} = \frac{|2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{12}{3\sqrt{29}} = \frac{4}{\sqrt{29}}$$

$$\Rightarrow \beta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{29}}\right) = 42.0^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\gamma = 48.0^\circ}}$$

Wir sehen nochmals, wie zügig die Winkelberechnung mit dieser Variante vonstatten geht.

7. (a) Grundsätzlich besteht die Schnittgerade zweier Ebenen aus allen Punkten, die sowohl in der einen, wie auch in der anderen Ebene enthalten sind. Es handelt sich in diesem Sinn um lauter Schnittpunkte und wir müssen zu deren Ermittlung daher die Parameterdarstellungen beider Ebenen gleichsetzen:

$$E_1 \cap E_2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 + m = 4 & \textcircled{1} \\ 1 + n = 2 + 2r & \textcircled{2} \\ 2 + n = -r + s & \textcircled{3} \end{vmatrix}$$

Wir erkennen, dass es sich um ein lineares Gleichungssystem mit mehr Unbekannten (4) als Gleichungen (3) handelt. Das System ist also **unterbestimmt**. Wir haben eine eindimensionale Wahlfreiheit – und das ist gut so, denn wir ermitteln eine *Schnittgerade*, also eine "eindimensionale Lösungsmenge".

Gleichung ① legt den Parameter $m = 1$ bereits ohne Wenn und Aber fest. Aus ② und ③ würde weiter folgen:

$$\begin{vmatrix} n = 1 + 2r \\ n = -2 - r + s \end{vmatrix} \Rightarrow 1 + 2r = -2 - r + s \Leftrightarrow s = 3 + 3r$$

Diese Gleichungen werden aber gar nicht mehr benötigt, denn zur Bestimmung der Geraden brauchen wir im Prinzip einfach zwei Punkte auf ihr. Dank unserer Wahlfreiheit dürfen wir nun willkürlich z.B. $n_P = 0$ und $n_Q = 1$ setzen. Zusammen mit $m = 1$ erhalten wir so aus der PD von E_1 bereits die Koordinaten zweier Punkte P und Q auf der Schnittgeraden:

$$\vec{P} = \vec{P}_1(1, 0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{Q} = \vec{P}_1(1, 1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{P}_g(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}}$$

- (b) Nun wird kein Parameter schon zu Beginn eindeutig festgelegt. Wir lösen das Gleichungssystem soweit wie möglich, wobei es unser Ziel ist, entweder die Parameter m und n zu E_1 oder die Parameter r und s zu E_2 voneinander abhängig zu machen, um damit anschliessend aus einer der beiden Ebenen-PDs leicht zwei Punkte auf der Schnittgerade zu ermitteln:

$$\begin{cases} 6 + 3m - 5n = 2 + 4r - s \\ 4 - 2m + 3n = 2 + 11r + s \\ 7 + 2m - 7n = 4 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 5n - 4r + s = -4 & \textcircled{1} \\ 2m - 3n + 11r + s = 2 & \textcircled{2} \\ 2m - 7n - 3s = -3 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Ich entscheide mich für die Eliminierung von r und s (weil r in einer Gleichung bereits nicht mehr auftritt) und starte mit r :

$$\begin{array}{l} 11 \cdot \textcircled{1} + 4 \cdot \textcircled{2}: \\ \textcircled{3}: \end{array} \begin{cases} 41m - 67n + 15s = -36 & \textcircled{4} \\ 2m - 7n - 3s = -3 & \textcircled{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \textcircled{4} + 5 \cdot \textcircled{5}: \quad 51m - 102n = -51 \quad \Leftrightarrow \quad m = 2n - 1$$

Damit sind wir in Sachen Lösung des Gleichungssystems am Ziel. Nun können wir z.B. $n_P = 0$ und $n_Q = 1$ setzen, um möglichst einfach zwei Punkte P und Q auf der Schnittgerade zu erhalten:

$$n_P = 0 \Rightarrow m_P = -1 \Rightarrow \vec{P} = \vec{P}_1(-1, 0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$n_Q = 1 \Rightarrow m_Q = 1 \Rightarrow \vec{Q} = \vec{P}_1(1, -1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{P}_g(t) = \vec{P} + t \cdot \vec{PQ} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}}}$$

- (c) Versuchen wir schliesslich noch dieselbe Methode bei (c):

$$\begin{cases} 2 - m + 3n = 1 + 4r + s \\ m + 2n = 1 + r + 4s \\ 1 + m = -r + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 3n + 4r + s = 1 & \textcircled{1} \\ m + 2n - r - 4s = 1 & \textcircled{2} \\ m + r - 2s = -1 & \textcircled{3} \end{cases}$$

Hier eliminiere ich m und n , weil n in $\textcircled{3}$ bereits nicht mehr auftritt:

$$\begin{array}{l} 2 \cdot \textcircled{1} + 3 \cdot \textcircled{2}: \\ \textcircled{3}: \end{array} \begin{cases} 5m + 5r - 10s = 5 \\ m + r - 2s = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + r - 2s = 1 & \textcircled{4} \\ m + r - 2s = -1 & \textcircled{5} \end{cases} \Rightarrow 1 = -1$$

Nun haben wir eine offensichtliche Unwahrheit erhalten. Das Gleichungssystem hat offenbar gar keine Lösung. Das kann nur bedeuten, dass wir es mit zwei **echt parallelen Ebenen** zu tun haben. **Es gibt keine Schnittgerade!**

8. Ein Punkt auf der x -Achse hat die y und die z -Koordinate 0. Diese beiden Bedingungen resp. Gleichungen legen die beiden Parameter r und s eindeutig fest, sodass wir durch Zurück einsetzen in die PD von E den zugehörigen Punkt berechnen können:

$$\begin{cases} y \stackrel{!}{=} 0 \\ z \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 + 5r - 3s = 0 \\ -10 + r - 2s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 + 5r - 3s = 0 \\ 50 - 5r + 10s = 0 \end{cases} \Rightarrow 48 + 7s = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{s = -\frac{48}{7}}}$$

$$\Rightarrow -2 + 5r - 3 \cdot \frac{-48}{7} = 0 \Leftrightarrow 5r = 2 - \frac{144}{7} = -\frac{130}{7} \Leftrightarrow \underline{\underline{r = -\frac{26}{7}}}$$

$$\Rightarrow x = 2 - 2r + 6s = 2 - 2 \cdot \frac{-26}{7} + 6 \cdot \frac{-48}{7} = \frac{14 + 52 - 288}{7} = \underline{\underline{-\frac{222}{7}}} \Rightarrow \underline{\underline{S_x \left(-\frac{222}{7}, 0, 0 \right)}}$$

Bei den Schnittpunkten mit der y - und mit der z -Achse gehen wir genau gleich vor:

$$\begin{cases} x \stackrel{!}{=} 0 \\ z \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2r + 6s = 0 \\ -10 + r - 2s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - r + 3s = 0 \\ -10 + r - 2s = 0 \end{cases} \Rightarrow -9 + s = 0 \Leftrightarrow \underline{s = 9}$$

$$\Rightarrow 2 - 2r + 6 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow 2r = 2 + 54 = 56 \Leftrightarrow \underline{r = 28}$$

$$\Rightarrow y = -2 + 5r - 3s = -2 + 5 \cdot 28 - 3 \cdot 9 = \underline{111} \Rightarrow \underline{\underline{S_y(0, 111, 0)}}$$

$$\begin{cases} x \stackrel{!}{=} 0 \\ y \stackrel{!}{=} 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - 2r + 6s = 0 \\ -2 + 5r - 3s = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -r + 3s = -1 \\ 5r - 3s = 2 \end{cases} \Rightarrow 4r = 1 \Leftrightarrow \underline{r = \frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \cdot \frac{1}{4} + 6s = 0 \Leftrightarrow 6s = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \underline{s = -\frac{1}{4}}$$

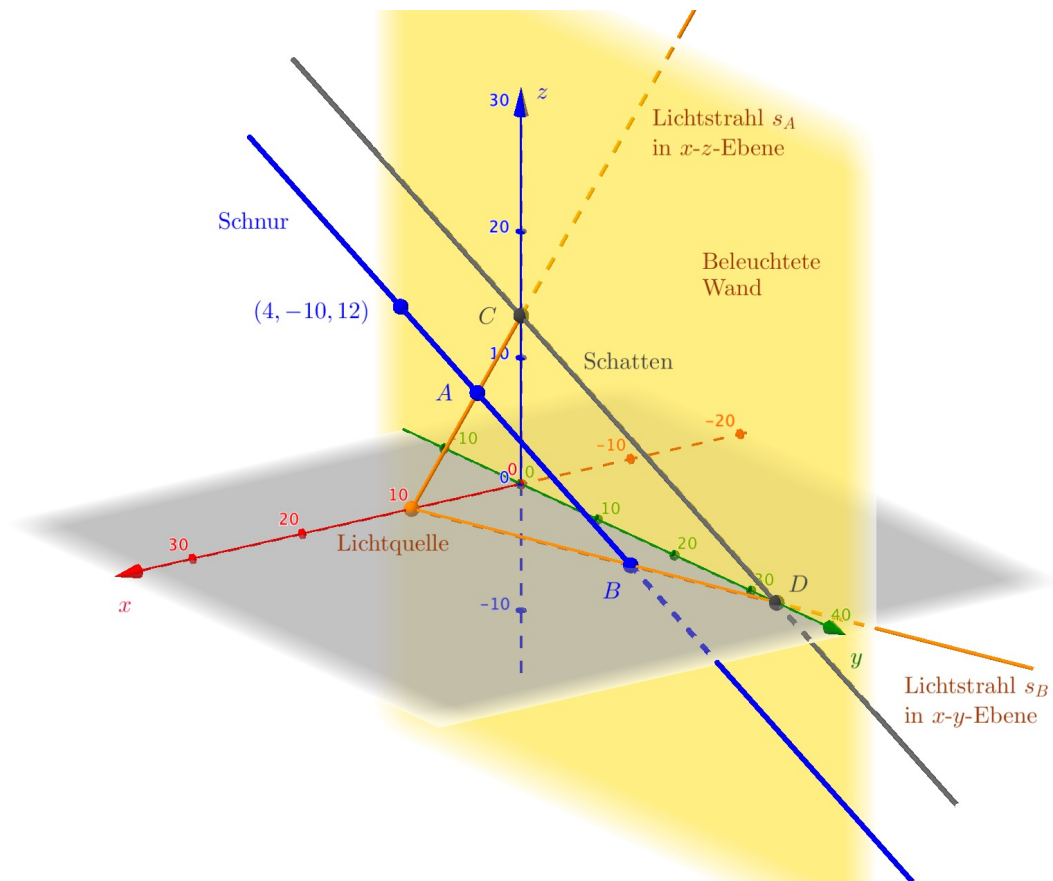
$$\Rightarrow z = -10 + r - 2s = -10 + \frac{1}{4} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -10 + \frac{3}{4} = \underline{\underline{-\frac{37}{4}}} \Rightarrow \underline{\underline{S_z\left(0, 0, -\frac{37}{4}\right)}}$$

9. Unten sehen wir die Situation mit der Lichtquelle, der Schnur und dem Schatten auf der Wand. Sobald wir zwei Punkte C und D des Schattens kennen, können wir eine PD zur Gerade durch diese beiden Punkte ermitteln. Die beiden Punkte C und D ergeben sich als Fortsetzungen der Lichtstrahlen, die von der Lichtquelle aus auf die beiden Punkte A und B auf der Schnur treffen. Diese Lichtstrahlen sind mit der Wand (= y - z -Ebene) zu schneiden um die Punkte C und D zu erhalten.

Im Prinzip kann ich beliebige zwei Punkte auf der Schnur auswählen. Die Zahlen werden aber besonders einfach, wenn ich den Punkt A in der x - z - und den Punkt B in der x - y -Ebene wähle. Ich brauche nur die PD der Schnur mit diesen Ebenen zu schneiden und erhalte so A und B :

$$x\text{-}z\text{-Ebene} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow -10 + 5t = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \underline{A(4, 0, 8)}$$

$$x\text{-}y\text{-Ebene} \Rightarrow z = 0 \Rightarrow 12 - 2t = 0 \Leftrightarrow t = 6 \Rightarrow \underline{B(4, 20, 0)}$$



Daraus ergeben sich die PDs für die Lichtstrahlen:

$$\text{Strahl } s_A: \vec{P}_{s_A}(m) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 4-10 \\ 0-0 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Strahl } s_B: \vec{P}_{s_B}(n) = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 4-10 \\ 20-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Diese PDs schneiden wir mit der y - z -Ebene ($x = 0$) und erhalten:

$$y\text{-}z\text{-Ebene} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 10 - 6m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{C\left(0, 0, \frac{40}{3}\right)}$$

$$y\text{-}z\text{-Ebene} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow 10 - 6n = 0 \Leftrightarrow n = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{D\left(0, \frac{100}{3}, 0\right)}$$

Nun können wir die PD des Schattens angeben:

$$\text{Schattengerade: } \vec{P}_{\text{Schatten}}(r) = \vec{C} + r \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{100}{3} \\ -\frac{40}{3} \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor lässt sich noch vereinfachen (Multiplikation mit $\frac{3}{20}$):

$$\underline{\underline{\vec{P}_{\text{Schatten}}(k) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{40}{3} \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

Wir bemerken: Der Richtungsvektor der Schattengeraden ist kollinear zum Richtungsvektor der Schnur!

10. (a) Wir benötigen einen Richtungsvektor \vec{w} , der senkrecht auf der Ebene E steht. Das bedeutet, \vec{w} muss orthogonal zu beiden Richtungsvektoren von E sein, also:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ -6x - 4y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow -2x - 3y = 0 \Leftrightarrow \underline{y = -\frac{2}{3}x}$$

Wie zu erwarten war, ergibt sich ein unterbestimmtes Gleichungssystem, weil wir in der Wahl der Länge des Richtungsvektors frei sind. Das bedeutet, wir dürfen eine seiner Komponenten nach eigenem Wunsch festlegen. Nach der letzten Gleichung drängt sich $x = 3$ auf, um besonders einfache Zahlen zu erhalten:

$$y = -\frac{2}{3}x = -\frac{2}{3} \cdot 3 = \underline{-2} \Rightarrow z = 3x + 2y = 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = \underline{5} \Rightarrow \underline{\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}$$

Nun können wir die gesuchte PD aufschreiben:

$$g: \vec{P}_g(t) = \vec{Q} + t \cdot \vec{w} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}}}$$

- (b) Wir schneiden g mit der Ebene E und erhalten so für den Fusspunkt F des Lotes von Q auf E :

$$\begin{cases} 9 + 3t = 2 + 4r + 3s \\ -2 - 2t = -2 + r + 2s \\ 6 + 5t = -5 - 2r - s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 4r + 3s - 7 \\ 2t = -r - 2s \\ 5t = -2r - s - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t = 4r + 3s - 7 & \textcircled{1} \\ 8t = -4r - 8s & \textcircled{2} \\ 10t = -4r - 2s - 22 & \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \textcircled{1} + \textcircled{2}: \\ \textcircled{1} + \textcircled{3}: \end{matrix} \begin{cases} 11t = -5s - 7 & \textcircled{4} \\ 13t = s - 29 & \textcircled{5} \end{cases} \Rightarrow \textcircled{4} + 5 \cdot \textcircled{5}: 76t = -152 \Leftrightarrow \underline{t = -\frac{152}{76} = -2}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{P}_g(-2) = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{F(3, 2, -4)}}$$

Eigentlich müssten wir zur Beantwortung der Frage gar nicht den Fusspunkt F bestimmen, sondern den Verbindungsvektor \vec{QF} , denn um dessen Betrag geht es letztlich. Er entspricht dem Abstand zwischen der Ebene E und dem Punkt Q . Dieser Verbindungsvektor \vec{QF} ist gerade $t \cdot \vec{w}$. Er ist doppelt so lang wie der Richtungsvektor \vec{w} . Um die Zahlen klein zu halten, berechnen wir zuerst den Betrag von \vec{w} und verdoppeln diesen anschliessend:

$$|\vec{w}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{38} \Rightarrow |\vec{QF}| = 2 \cdot |\vec{w}| = \underline{\underline{2\sqrt{38}}}$$