Übungen zur Vektorgeometrie

SERIE VIII: Parameterdarstellung von Ebenen

Klasse 155c / AGe

1. Bestimme jeweils den Durchstosspunkt der Gerade g durch die Ebene E:

   (a) $g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $E: \quad \vec{P}_E(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $E: \quad \vec{P}_E(s,t) = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

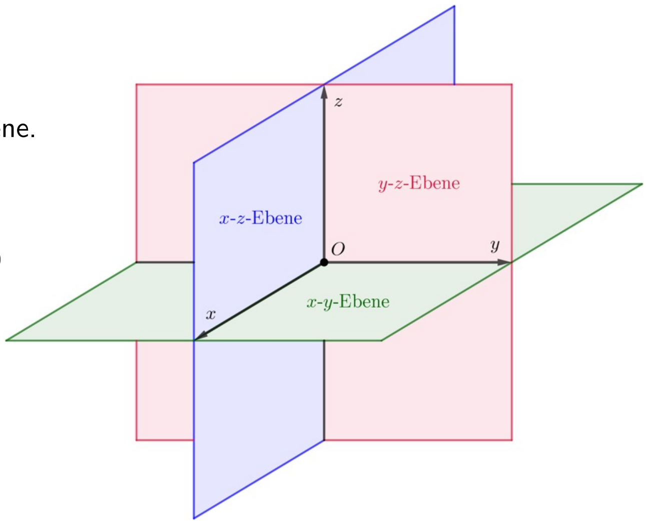
   (c) $g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $E: \quad \vec{P}_E(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$

2. Notiere eine PD der Ebene E, die $Q(0,7,2)$ und $g: \quad \vec{P}_g(k) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ beinhaltet.

3. Gib zu jedem Punktetripel die PD einer Ebene an, die alle drei Punkte enthält:

   (a) $A(3,0,0), B(0,4,0), C(0,0,2)$ (b) $A(4,2,-1), B(3,-5,1), C(2,6,0)$

4. *Veranschaulichungen helfen!* ... Gib je eine PD zu den im folgenden beschriebenen Ebenen an:



   (a) E_1 ist die x-y-, E_2 die x-z- und E_3 die y-z-Ebene.

   (b) E_4 enthält den Punkt $P(2,3,0)$ und verläuft parallel zur x-z-Ebene.

   (c) E_5 enthält die Ursprungsgerade durch $B(3,1,0)$ und steht senkrecht auf der x-y-Ebene.

   (d) E_6 enthält die Winkelhalbierende des 1. Quadranten der y-z-Ebene und steht senkrecht zur y-z-Ebene.

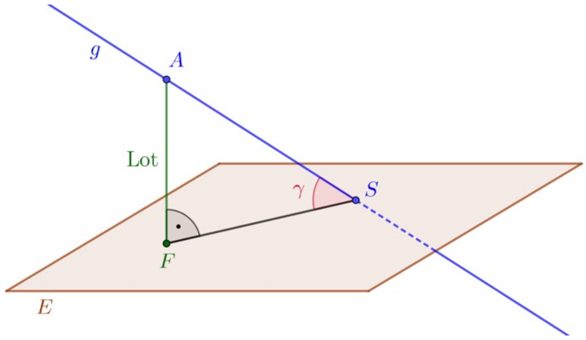
   (e) Als die drei **Spurpunkte** einer Gerade bezeichnet man ihre Schnittpunkte mit der x-y-, der x-z- und der y-z-Ebene.

   Es sei $g: \quad \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bestimme die Spurpunkte von g.

5. Schneide $g: \vec{P}_g(r) = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 17 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit $E: \vec{P}_E(s,t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Im Zusammenhang mit Ebenen gibt es etliche Aufgabenstellungen, die wir in Zukunft nicht mit einer PD lösen werden, weil sie damit zu umständlich sind. Hier sind ein paar solche Aufgaben, die bei Verwendung von PDs teilweise zu recht langwierigen und mühsamen Lösungswegen führen. Weil wir diese Aufgaben bald eleganter lösen können, sind sie mittelfristig in dieser Weise nicht mehr so wichtig. Im Moment dienen sie allerdings unserem Training, sowie der weiteren Veranschaulichung und dem Verständnis dreidimensionaler Situationen.

6. Durchsticht resp. schneidet eine Gerade g eine Ebene E, so lässt sich ein spitzer Schnittwinkel berechnen. Überlege dir anhand der Skizze rechts, wie das gehen könnte.



   Berechne nun die spitzen Winkel, mit dem die Gerade

$$g:\ \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   die folgenden beiden Ebenen schneidet:

$$E_1:\ \vec{P}_1(m,n) = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_2:\ \vec{P}_2(r,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

7. Gesucht ist bei den folgenden drei Ebenenpaaren jeweils die Parameterdarstellung der Schnittgeraden.

   (a) $E_1:\ \vec{P}_1(m,n) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $E_2:\ \vec{P}_2(r,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   (b) $E_1:\ \vec{P}_1(m,n) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $E_2:\ \vec{P}_2(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

   (c) $E_1:\ \vec{P}_1(m,n) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2:\ \vec{P}_2(r,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. Gegeben sei die Ebene $E:\ \vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   In welchen Punkten wird E von den drei Koordinatenachsen durchstossen?

9. Die y-z-Ebene stelle eine Wand dar. An der Stelle $x = 10$ stehe eine punktförmige Lichtquelle.

   Die Gerade $g:\ \vec{P}_g(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschreibe eine parallel zur Wand aufgespannte Schnur.

   Skizziere die Situation und beschreibe den Schatten der Schnur auf der Wand als PD einer Gerade.

   Was fällt dir am Resultat auf?

10. Es seien $E:\ \vec{P}_E(r,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $Q(9,-2,6)$.

    (a) Wie lautet eine PD der Gerade g senkrecht zu E durch Q?

    (b) Wie gross ist der Abstand des Punktes Q zur Ebene E?