G. “Migration” von zwei auf drei Dimensionen

Wir werden nun mit der Vektorgeometrie im dreidimensionalen Raum fortfahren. Dabei können wir sehr Vieles von dem, was wir im Zweidimensionalen erarbeitet haben, fast $1:1$ ins Dreidimensionale übernehmen. Nun bei ganz wenigen Aspekten müssen wir neu denken. Gehen wir Punkt für Punkt durch die bisherigen Inhalte...

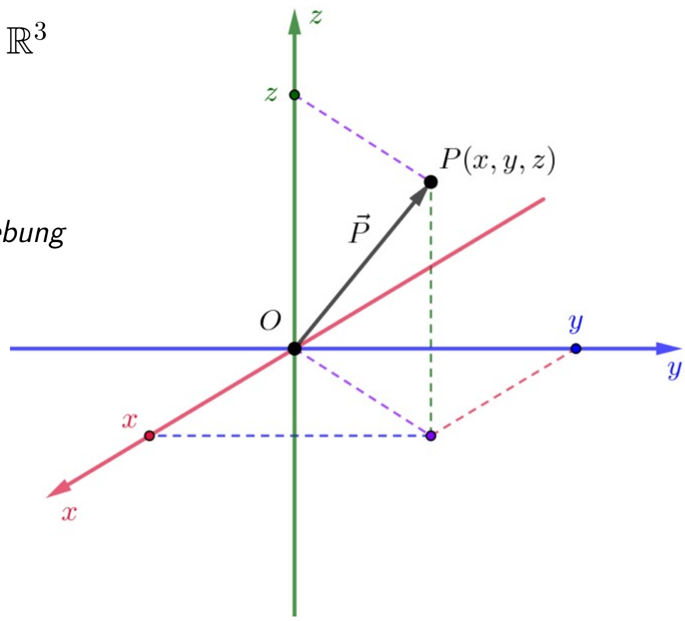
A. Vektoren im $\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Wir benötigen neu ein dreidimensionales x-y-z-Koordinatensystem, das alle *Punkte* $P(x, y, z)$ mit $x, y, z \in \mathbb{R}$ enthält.

Auch in 3D steht ein Vektor $\vec{a}$ für eine *Verschiebung* (= *Translation*). Neu werden zur Beschreibung aber 3 Komponenten benötigt:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad a_x, a_y, a_z \in \mathbb{R}$$

Auch in 3D werden wir einen Vektor oft durch einen *Pfeil repräsentieren*.



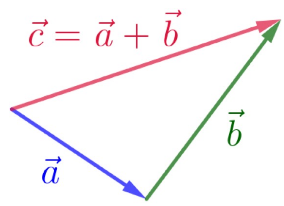
B. Grundoperationen mit Vektoren

Auch in drei Dimensionen funktionieren die folgenden drei Grundoperationen *komponentenweise*:

Vektoraddition

$\widehat{=}$ Pfeile aneinanderhängen

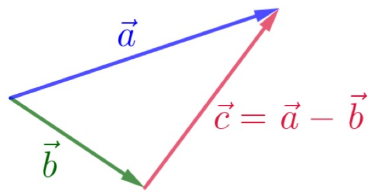
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix}$$



Vektorsubtraktion

$\widehat{=}$ Differenzpfeil zweier Pfeile ermitteln

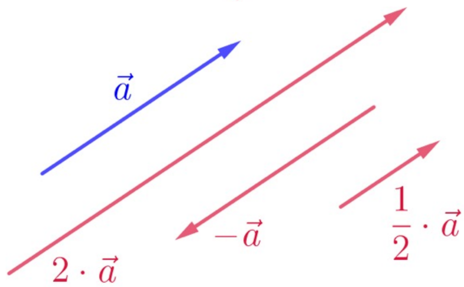
$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$



Skalare Multiplikation

$\widehat{=}$ Pfeil mit Faktor strecken

$$k \cdot \vec{a} = k \cdot \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cdot a_x \\ k \cdot a_y \\ k \cdot a_z \end{pmatrix}$$



Notizen

- Vektorsubtraktion $\vec{a} - \vec{b}$ kann als Addition des Gegenvektors $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$ verstanden werden.
- $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind *kollinear* ($\widehat{=}$ verlaufen parallel), wenn $\vec{b}$ skalares Vielfaches von $\vec{a}$ ist: $\vec{b} = k \cdot \vec{a}$.

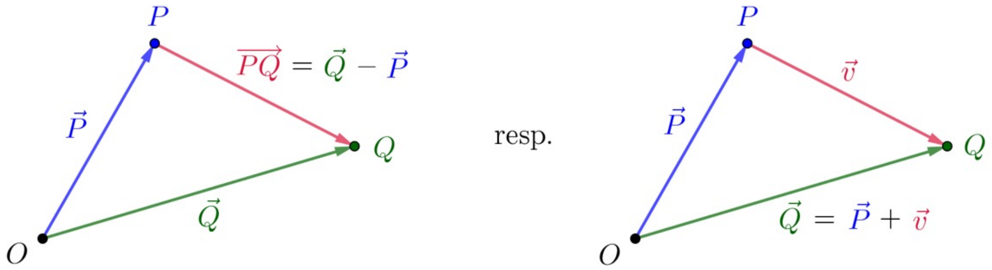
C. Ortsvektoren

Bezüglich Ortsvektoren bleiben die Konzepte wie gehabt, aber jetzt halt in 3D:

- Der *Ortsvektor* $\vec{P}$ bringt mich vom Ursprung $O(0,0,0)$ zum Punkt $P(x,y,z)$:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  Wir verwenden Ortsvektoren zur Beschreibung/Angabe von Punkten.
- $\overrightarrow{PQ}$ = Verschiebung von P nach Q = Differenz $\vec{Q} - \vec{P}$ der beiden Ortsvektoren:



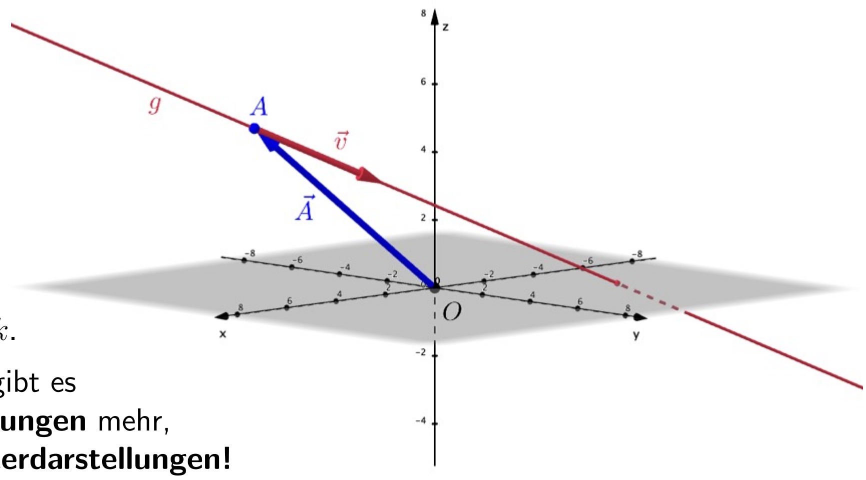
- Hängen wir einen Vektor $\vec{v}$ an einen Ortsvektor $\vec{P}$, so führt dies zum neuen Ort $\vec{Q} = \vec{P} + \vec{v}$.
- Mit Ortsvektoren berechnen wir sehr direkt *Mittelpunkte* $\vec{M}$ und *Schwerpunkte* $\vec{S}$, Hier ein Beispiel mit drei Punkten A_1 bis A_3 (mit Massen m_1 bis m_3):

$$\vec{M} = \frac{\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3}{3} \qquad \text{und} \qquad \vec{S} = \frac{m_1 \cdot \vec{A}_1 + m_2 \cdot \vec{A}_2 + m_3 \cdot \vec{A}_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

D. Parameterdarstellung (PD) von Geraden

Wie in 2D: Mit dem *Aufvektor* $\vec{A}$ springen wir vom Ursprung O zu irgendeinem *(Auf-)Punkt* A auf der Gerade g. Ein *Richtungsvektor* $\vec{v}$ gibt die Richtung von g vor. Das bedeutet, vom Punkt A aus gelangen wir durch ein reelles Vielfaches von $\vec{v}$ zu jedem beliebigen Punkt P auf der Gerade. Somit gilt für die Ortsvektoren $\vec{P}$ aller Punkte P auf der Gerade g:

$$\vec{P}_g(k) = \vec{A} + k \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{R}$$



Zu jedem $P \in g$ gehört ein bestimmter Wert des Parameters k.

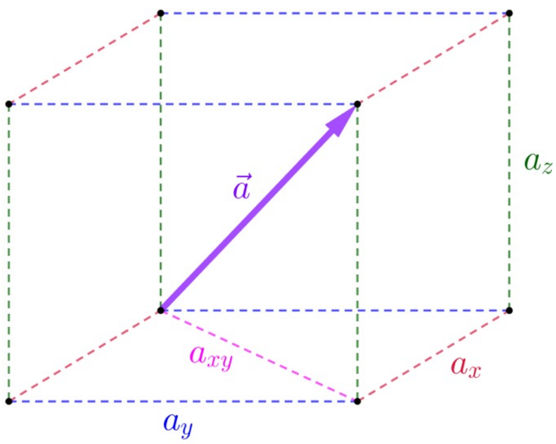
Bemerke: Im Dreidimensionalen gibt es zu Geraden **keine Geradengleichungen** mehr, sondern **ausschliesslich Parameterdarstellungen!**

Relative Lage zweier Geraden im $\mathbb{R}^3$

Hier werden wir tatsächlich über die Bücher müssen: Zwar können wir immer noch wie im Zweidimensionalen feststellen, ob zwei Geraden *parallel* verlaufen (Richtungsvektoren kollinear) und dann allenfalls *identisch* oder *echt parallel* sind, aber wenn keine Parallelität vorliegt, sind wir mit ganz neuen Möglichkeiten konfrontiert, denn im Dreidimensionalen können die Geraden auch komplett aneinander vorbeilaufen. Wir sagen dann, die Geraden sind *windschief* (zueinander).

E. Vektorbeträge

Bei Betragsberechnungen müssen wir den *Satz des Pythagoras* auf drei Dimensionen erweitern. Der *Betrag* von $\vec{a}$ entspricht der Länge einer Quaderdiagonale (vgl. Abbildung) und es gilt:



$$\begin{aligned} a_{xy}^2 &= a_x^2 + a_y^2 \\ \Rightarrow \quad a^2 &= |\vec{a}\,|^2 = a_{xy}^2 + a_z^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \\ \Rightarrow \quad a &= |\vec{a}\,| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{aligned}$$

Ist $\overrightarrow{PQ}$ der Vektor von $P(x_P, y_P, z_P)$ nach $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, so folgt:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\,\right| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2 + (z_Q - z_P)^2}$$

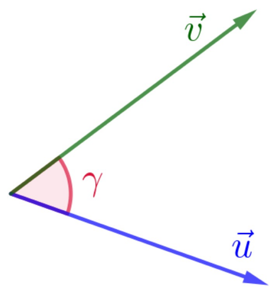
Wie im Zweidimensionalen erhalten wir den *Einheitsvektor* $\vec{e}_v$ (Länge 1) in Richtung von $\vec{v}$ via:

$$\vec{e}_v = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x/v \\ v_y/v \\ v_z/v \end{pmatrix}$$

F. Das Skalarprodukt

Unsere zweidimensionale Herleitung des Winkels γ zwischen zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ funktioniert in drei Dimensionen genau gleich (siehe Übungen) und führt, ausgehend vom *Cosinussatz* im allgemeinen Dreieck, auf die Beziehung:

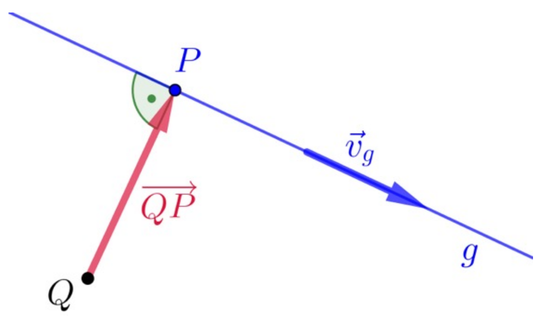
$$u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z = uv\,\cos\gamma$$



Daraus motiviert sich die Definition des Skalarprodukts im $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} := u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

Alle Eigenschaften des Skalarproduktes bleiben genau dieselben wie im $\mathbb{R}^2$.
Insbesondere gilt immer noch die *Winkelformel*



$$\cos\gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v}$$

und das *Orthogonalitätskriterium*

$$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Ob Vektoren im $\mathbb{R}^3$ senkrecht zueinander stehen, ist also immer noch sehr leicht zu erkennen.

Mit dem Skalarprodukt lässt sich auch die *Abstandsbestimmung* zwischen einem Punkt P und einer Gerade g immer noch auf dieselbe Weise wie im Zweidimensionalen vornehmen: Der Richtungsvektor $\vec{v}_g$ muss senkrecht zum Verbindungsvektor $\overrightarrow{QP}$ stehen, $\vec{v} \cdot \overrightarrow{QP} \overset{!}{=} 0$, wobei P ein Punkt auf g ist, den wir durch die PD von g sehr direkt ausdrücken können.