

Bisherige Erkenntnisse zum Skalarprodukt

Wir haben bereits gesehen, dass das

$$\text{Skalarprodukt} \quad \vec{u} \cdot \vec{v} := u_x v_x + u_y v_y \quad (1)$$

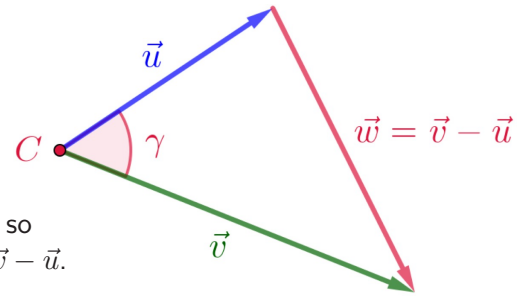
zweier Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ die bemerkenswerte Eigenschaft aufweist, dass $\vec{u} \cdot \vec{v}$ genau dann gleich 0 ist, wenn \vec{u} und \vec{v} *orthogonal* (= senkrecht) zueinander stehen. Dies alleine wäre bereits Motivation genug, das Skalarprodukt gemäss (1) als etwas Eigenständiges zu definieren. Es kommt aber noch besser, wie wir nun sehen werden.

Weitere Motivation für die Definition des Skalarproduktes

Wenn wir den Winkel zwischen zwei Vektoren bestimmen möchten, so erinnern wir uns an den *Cosinussatz* aus der Trigonometrie, mit dem sich dieses Problem lösen lässt.

In der Skizze rechts lassen wir vom Punkt C je einen Repräsentanten (= Pfeil) von \vec{u} und \vec{v} ausgehen.

Fassen wir diese Pfeile als Seitenvektoren eines Dreiecks auf, so gehört zur gegenüberliegenden Seite von C der Vektor $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$. (Man könnte übrigens ebenso gut $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$ definieren.)



In diesem *allgemeinen Dreieck* gilt der Cosinussatz, der eine Verbindung zwischen den drei Seitenlängen und dem Winkel γ herstellt, nämlich:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \gamma \quad (2)$$

Dabei stehen u , v und w für die *Vektorbeträge* $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ und $|\vec{w}|$, also für die Seitenlängen des Dreiecks. Diese Vektorbeträge lassen sich in gewohnter Weise durch die Vektorkomponenten ausdrücken. Im Zweidimensionalen gilt:

$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \quad , \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \text{und} \quad w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} \quad .$$

Mit $\vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$ resp. $\begin{pmatrix} w_x \\ w_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - u_x \\ v_y - u_y \end{pmatrix}$ schreiben wir für den Betrag von \vec{w} weiter:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \sqrt{(v_x - u_x)^2 + (v_y - u_y)^2} = \sqrt{v_x^2 - 2u_x v_x + u_x^2 + v_y^2 - 2u_y v_y + u_y^2} \quad .$$

Diese Ausdrücke für die Vektorbeträge, resp. für ihre Quadrate, setzen wir in den Cosinussatz (2) ein:

$$\begin{aligned} \text{Cosinussatz:} \quad w^2 &= u^2 + v^2 - 2uv \cos \gamma && | \text{ Ausdrücke einsetzen} \\ \Rightarrow v_x^2 - 2u_x v_x + u_x^2 + v_y^2 - 2u_y v_y + u_y^2 &= u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 - 2uv \cos \gamma && | - u_x^2 - u_y^2 - v_x^2 - v_y^2 \\ \Leftrightarrow -2u_x v_x - 2u_y v_y &= -2uv \cos \gamma && | : (-2) \\ \Leftrightarrow u_x v_x + u_y v_y &= uv \cos \gamma \end{aligned}$$

Auf der linken Seite ist das Skalarprodukt von \vec{u} und \vec{v} stehengeblieben! Dieses ist also ganz direkt mit dem Zwischenwinkel γ verknüpft. Offensichtlich gilt (nach Division durch die Vektorbeträge u und v):

$$\cos \gamma = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{u \cdot v} \quad (3)$$

Mit dem Ausdruck $u_x v_x + u_y v_y$ lassen sich somit sehr effizient Winkel zwischen zwei Vektoren berechnen, was uns noch mehr dazu *motiviert* (= bewegt resp. veranlasst), ihn als eine spezielle Verknüpfung zweier Vektoren zu begreifen und ihm einen eigenen Namen, eben *Skalarprodukt*, zu verpassen!