

# Übungen zur vollständigen Induktion – Lösungen Serie I

## 1. Summenformeln

(a) Zunächst verankern wir die Behauptung mit  $n = 1$ :

$$V: 1 = 1^2 \quad \checkmark$$

Die 1 links steht für die Summe von der ungeraden Zahl 1 bis zur ungeraden Zahl 1 und somit eben für die Zahl 1 alleine. Das Quadrat  $1^2$  rechts ist die 1, eingesetzt in die behauptete Summenformel. Verankerungen sehen oft dermassen einfach aus. Sie dürfen aber nie vergessen werden, denn sonst ist die vollständige Induktion eben nicht komplett.

Nun folgt der Induktionsschritt: Wir nehmen an, die Aussage  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$  sei für ein bestimmtes  $n$  korrekt. Dann notieren wir die Summe bis zur nächsten ungerade Zahl resp. bis zu  $n + 1$  und versuchen anschliessend mittels der Annahme zu zeigen, dass die neue Summe gleich  $(n + 1)^2$  sein muss:

$$\begin{aligned} S: \sum_{k=1}^{n+1} (2k - 1) &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) \\ &= \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)}_{\text{bisherige Summe}} + \underbrace{2n + 1}_{\text{neues Glied}} \\ &= n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Damit ist der Induktionsschritt gelungen und die Aussage ist für alle  $n \geq 1$  bewiesen.

(b) Wiederum starten wir mit der Verankerung ( $n = 1$ ):

$$V: 1^2 = 1 \quad \text{und} \quad \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \quad \checkmark$$

Das stimmt schonmal. Nun erfolgt der Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} S: \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{\text{bisherige Summe}} + \underbrace{(n + 1)^2}_{\text{neues Glied}} = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + (n + 1)^2 \\ &= \frac{n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2}{6} = \frac{(n + 1)(n(2n + 1) + 6(n + 1))}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} = \frac{(n + 1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6} = \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Beachte, dass ich beim Rechnen besonders geschickt vorgegangen bin: Anstatt auf der zweiten Zeile alles auszumultiplizieren, was auf ein Polynom 3. Grades führen würde, habe ich stattdessen gesehen, dass sich direkt  $(n + 1)$  ausklammern lässt. Dies vereinfacht die Ausmultiplikation des Rests und dessen anschliessende Faktorisierung ganz wesentlich!

Wenn wir im Schlussresultat anstelle von  $(n + 1)$  z.B.  $N$  notieren, sehen wir nochmals deutlicher, dass dies tatsächlich der gesuchte Ausdruck ist:

$$N = n + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)(2(n + 1) + 1)}{6} = \frac{N(N + 1)(2N + 1)}{6} \quad \checkmark$$

Somit ist die Formel für die Summe aller Quadrate bis  $n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen.

## 2. Teilbarkeiten

(a) Die Verankerung für  $n = 1$  ist denkbar einfach:

$$V: \quad 3^1 - 1 = 3 - 1 = 2 \quad \text{ist durch 2 teilbar.} \quad \checkmark$$

Nun müssen wir überlegen, wie wir die Induktionsannahme, also dass  $3^n - 1$  für ein bestimmtes  $n$  gerade resp. durch 2 teilbar (tb) ist, in den Induktionsschritt einbauen. Das ist aber gar nicht so schwierig:

$$S: \quad 3^{n+1} - 1 = 3^n \cdot 3 - 1 = 3^n \cdot (2 + 1) - 1 = \underbrace{2 \cdot 3^n}_{\text{durch 2 tb}} + \underbrace{3^n - 1}_{\text{gemäss Annahme durch 2 tb}}$$

Nun ist allerdings eine Summe aus zwei Zahlen, die beide durch zwei teilbar sind, gemäss *Distributivgesetz* ebenfalls durch 2 teilbar:

$$2a + 2b = 2(a + b)$$

Folglich ist  $3^{n+1} - 1$  ebenfalls durch 2 teilbar und die Aussage ist bewiesen.

(b) Wir gehen genau gleich vor wie unter (a):

$$V: \quad 8^1 - 1 = 8 - 1 = 7 \quad \text{ist durch 7 teilbar.} \quad \checkmark$$

$$S: \quad 8^{n+1} - 1 = 8^n \cdot 8 - 1 = 8^n \cdot (7 + 1) - 1 = \underbrace{7 \cdot 8^n}_{\text{durch 7 tb}} + \underbrace{8^n - 1}_{\text{gemäss Annahme durch 7 tb}}$$

Wiederum sehen wir zuletzt eine Summe aus zwei durch 7 teilbaren Zahlen. Diese ist ebenfalls durch 7 teilbar. Damit ist der Induktionsschritt gelungen und die Aussage ist bewiesen.

## 3. Ungleichungen

(a) Die Verankerung läuft ganz direkt:

$$V: \quad 2^2 > 2 + 1 \quad \checkmark$$

Nun gehen wir davon aus, dass für ein bestimmtes, aber nicht näher bekanntes  $n$  gilt:  $2^n \geq n + 1$ . Daraus folgt der Induktionsschritt:

$$S: \quad 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > (n + 1) \cdot 2 = 2n + 2 > n + 2 = (n + 1) + 1 \quad \checkmark$$

Dabei haben wir verwendet, dass  $2n$  für  $n \geq 2$  stets grösser ist als  $n$ . Der Induktionsschritt hat funktioniert und die Aussage ist bewiesen.

(b) Wir gehen sehr vergleichbar vor wie unter (a):

$$V: \quad 2^4 \geq 4^2 \quad \checkmark \quad (\text{Gleichheit})$$

Aus  $2^n \geq n^2$  für irgendein  $n \geq 4$  folgt nun:

$$S: \quad 2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \geq n^2 \cdot 2 = 2n^2$$

An dieser Stelle ist nun nicht direkt sichtbar, dass dieser Ausdruck grösser oder gleich gross ist wie  $(n + 1)^2$ , was eigentlich herauskommen sollte. Wir können aber kurz überlegen, dass  $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$  ist, und diesen Ausdruck mit  $2n^2$  vergleichen. Soll  $2n^2$  grösser oder gleich diesem  $(n + 1)^2$  sein, so muss  $n^2 \geq 2n + 1$  sein. Das können wir nochmals induktiv beweisen:

$$V: \quad 4^2 > 2 \cdot 4 + 1 \quad (\text{Start immer noch bei } n = 4) \quad \checkmark$$

$$S: \quad (n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2 + 2(n + 1) - 1 > 2(n + 1) + 1 \quad \text{für } n \geq 4, \text{ weil } n^2 \geq 16$$

Folglich ist  $2n^2 > (n + 1)^2$  für alle  $n \geq 4$  und der Induktionsschritt gelingt.  $2^n$  ist also grösser oder gleich  $n^2$  für alle  $n \geq 4$ .

#### 4. Binomialkoeffizienten

1		$\binom{0}{0}$		0. Zeile			
1	1		$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1. Zeile			
1	2	1	$\Leftrightarrow$	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	2. Zeile		
1	3	3	1		$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	3. Zeile	
1	4	6	4	1		$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	4. Zeile

- (a) Das Pascal'sche Dreieck entsteht, indem jeweils zwei nebeneinander liegende Binomialkoeffizienten in einer Zeile addiert werden. Das Resultat ist dann der Binomialkoeffizient in der Zeile darunter zwischen den beiden oberen Koeffizienten. Das ist der Bildungsalgorithmus, der durch  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$  beschrieben wird.

An den Rändern oder zu oberst, wo dieser Algorithmus so nicht funktioniert, steht jeweils die Zahl 1. Allerdings könnte man auch sagen, dass für alle  $k$  der  $n$ -ten Zeile, die nicht im Bereich  $0 \leq k \leq n$  liegen,  $\binom{n}{k} = 0$  ist. Damit stimmt der rekursive Algorithmus auch an den Rändern. Nur die oberste 1, also  $\binom{0}{0} = 1$ , muss festgelegt werden.

- (b) Wir starten mit der Verankerung in der 0-ten Zeile:

$$V: \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 \quad \checkmark$$

Nun nehmen wir an, die Summe über alle Binomialkoeffizienten in der  $n$ -ten Zeile betrage  $2^n$ , und betrachten damit die  $(n+1)$ -te Zeile. Wir möchten den Bildungsalgorithmus verwenden, um den Koeffizienten  $\binom{n+1}{k}$  in der  $(n+1)$ -ten Zeile durch zwei Koeffizienten der  $n$ -ten Zeile auszudrücken. Dafür "verschieben" wir den bisherigen Bildungsalgorithmus eine Zeile nach unten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \Rightarrow \quad \binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Überlege dir anhand konkreter Werte für  $n$  und  $k$ , dass das so richtig ist, z.B.  $\binom{n+1}{3} = \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ ! Nun können wir den Induktionsschritt ausführen:

$$\begin{aligned}
 S: \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) \\
 &= \underbrace{\binom{n}{-1}}_{=0} + \binom{n}{0} + \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \\
 &\quad + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} + \binom{n}{n} + \underbrace{\binom{n}{n+1}}_{=0} \\
 &= 2 \cdot \binom{n}{0} + 2 \cdot \binom{n}{1} + \dots + 2 \cdot \binom{n}{n-1} + 2 \cdot \binom{n}{n} \\
 &= 2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Das ist genau, was es im Induktionsschritt zu zeigen galt. Somit ist die Behauptung bewiesen: Die Summe über alle Binomialkoeffizienten der  $n$ -ten Zeile beträgt stets  $2^n$ .