

SERIE I: Konsolidierung des Grundverständnisses

Klasse 155c / AGe

Typische Anwendungsfelder der vollständigen Induktion sind Beweise von Summenformeln, Teilbarkeitsregeln, Ungleichungen, etc. In dieser Übungsserie wollen wir erste relativ einfache Beispiele dazu betrachten. Arbeitet und diskutiert zusammen in kleinen Gruppen und findet bei Schwierigkeiten gemeinsam Lösungen.

1. Summenformeln

(a) Zeige für alle $n \geq 1$:

$$\text{Summe der ungeraden Zahlen bis } 2n - 1 = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

(b) Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Summe der Quadratzahlen bis } n^2 = \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Teilbarkeiten

(a) Zeige für alle $n \geq 1$, dass $3^n - 1$ durch 2 teilbar ist.

Anmerkung: Dies von Anfang an klar, weil 3^n stets ungerade und somit $3^n - 1$ stets gerade ist. Dennoch ist dies eine gute Übung für das Verständnis der vollständigen Induktion.

(b) Zeige ebenfalls für $n \geq 1$, dass $8^n - 1$ stets durch 7 teilbar ist.

3. Ungleichungen

(a) Zeige, dass für alle $n \geq 2$ gilt: $2^n > n + 1$.

(b) Zeige für alle $n \geq 4$, dass $2^n \geq n^2$ ist.

4. Binomialkoeffizienten

Die Zahlen im Pascal'schen Dreieck heißen *Binomialkoeffizienten*. Für den k -ten Eintrag in der n -ten Zeile schreibt man kurz $\binom{n}{k}$ und sagt "n tief k". Dabei beginnt sowohl die Zeilen-, als auch die Eintragsnummerierung bei 0 und es ist stets $0 \leq k \leq n$:

1		$\binom{0}{0}$		0. Zeile	
1	1		$\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$	1. Zeile	
1	2	1	\Leftrightarrow	$\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$	2. Zeile
1	3	3		$\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$	3. Zeile
1	4	6		$\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$	4. Zeile

Das rekursive Bildungsgesetz für die Binomialkoeffizienten lautet:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \text{mit} \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \text{und} \quad \binom{0}{0} = 1$$

(a) Führe dir nochmals vor Augen, was dieses rekursive Bildungsgesetz im Pascal'schen Dreieck genau bedeutet (\rightarrow kurz in Worte fassen!).

(b) Zeige nun mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$