

SERIE II: Weitere Aufgaben von leicht bis schwierig

Klasse 155c / AGe

1. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $3^n \geq n + 2$.

Dabei steht $n!$ (sprich: " n Fakultät") für das Produkt von 1 bis n , also: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

2. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $n! \geq 2^{n-1}$.

3. Behauptung: Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

4. Eine Folge (a_n) sei rekursiv durch $a_{n+1} = 3a_n + 2$ mit $a_1 = 2$ definiert.

Zeige induktiv, dass die explizite Definition lautet: $a_n = 3^n - 1$.

5. Stimmt die folgende Summenformel für alle $n \in \mathbb{N}$?

$$\sum_{k=1}^n k \cdot 2^{k-1} = 1 + 4 + 12 + 32 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

6. Beweise, dass $4^n - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.

7. Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

8. Zeige, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

9. Die *Fibonacci*-Zahlenfolge (F_n) ist gegeben durch

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

(a) Gib die rekursive Definition von (F_n) an.

(b) Beweise, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\sum_{k=1}^n F_k = F_{n+2} - 1$$

10. Beweise: Für alle $n \geq 1$ ist $11^n - 6^n$ durch 5 teilbar.

11. Beweise die Richtigkeit der sogenannten *Bernoulli*-Ungleichung:

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle reellen } x \geq -1.$$