

Vollständige Induktion

Eine Kurzübersicht für die Promotion 155 – Mai 2026 – AGe

1 Einführungsbeispiel

Die **vollständige Induktion** ist eine *Beweistechnik* für eine gewisse Art mathematischer Aussagen. Bevor ich dazu mehr Allgemeines sage, möchte ich mit einem Beispiel starten, an dem wir bereits alles Relevante dieser Technik erkennen können.

Behauptung: Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt stets:

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

Diese Summenformel hatten wir früher bereits auf andere Art bewiesen.¹ Sie taugt aber auch bestens als Beispiel für die vollständige Induktion. Hier werden quasi unendlich viele Behauptungen aufgestellt, nämlich ja eine für jede natürliche Zahl n .

Beweis Teil 1 – Induktionsverankerung (V): Wir überprüfen zuerst, ob die Formel (1) für den Fall des kleinsten n 's, also für $n = 1$ bereits richtig ist. Die Summe von 1 bis $n = 1$ beträgt natürlich 1. Dafür liefert (1):

$$\text{Induktionsverankerung (V):} \quad \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \checkmark$$

Beweis Teil 2.1 – Induktionsannahme (A): Wir nehmen nun an, dass die Formel für irgendeine Zahl n korrekt ist, dass also für ein bestimmtes n tatsächlich gilt:

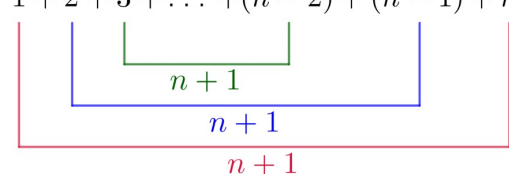
$$\text{Induktionsannahme (A):} \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{stimme für die Zahl } n.$$

Beweis Teil 2.2 – Induktionsschritt (S): Ausgehend von der Induktionsannahme zeigen wir nun, dass (1) auch für die Zahl $n + 1$ richtig ist. Das ist in der Regel eine kleinere oder grössere algebraische Überlegung.

In unserem Beispiel substituieren wir $n+1$ durch die Variable k . Es sei also $k = n+1$. Das machen wir lediglich zugunsten des genauen Verständnisses und werden später meistens darauf verzichten. Die Summe von 1 bis k ist folglich die Summe von 1 bis $n+1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1)$$

¹Diesen Beweis hatten wir z.B. im Thema *Folgen und Reihen* erbracht. Die Überlegung war relativ einfach: Die Glieder der Reihe $1 + 2 + 3 + \dots + n$ kann man paarweise so zusammenzählen, dass sich stets die Summe $n + 1$ ergibt. Dann gibt es $\frac{n}{2}$ solcher Paarsummen und folglich muss die Summe $\frac{n(n+1)}{2}$ betragen:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n = \frac{n}{2} \cdot (n+1)$$


Dies funktioniert auch bei einer ungeraden Anzahl Glieder. Dann ist die einzelne Paarsumme $n + 1$ das Doppelte der mittleren Zahl in der Summe, während die Anzahl Summenglieder $\frac{n}{2}$ eine Zahl der Form $x.5$ ist, sodass die Paarsumme $n + 1$ einmal nur halb gezählt wird und somit das mittlere Glied eben doch nur einfach mit einfließt.

Nun erkennen wir in den ersten n Gliedern dieser Summe die linke Seite der Induktionsannahme, zu der nur noch die Zahl k resp. $(n + 1)$ hinzuaddiert wird. Da die Induktionsannahme richtig sein soll, können wir die Summe von 1 bis n durch sie ersetzen und dann mit dem zusätzlichen Summanden $(n + 1)$ verrechnen:

$$\begin{aligned}
 1 + 2 + 3 + \dots + k &= \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{\text{bisherige Summe}} + \underbrace{(n + 1)}_{\text{neues Glied}} = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\
 &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\
 &= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \\
 &= \frac{(n + 1)((n + 1) + 1)}{2} = \frac{k(k + 1)}{2}
 \end{aligned}$$

- Am Ende der ersten Zeile sehen wir, wie die Induktionsannahme verwendet wird, um die Summe von 1 bis n durch $\frac{n(n+1)}{2}$ zu ersetzen.
- Auf der zweiten und dritten Zeile finden lediglich algebraische Umformungen statt: Gleichnamig machen, ausmultiplizieren, zusammenfassen und faktorisieren.
- Auf der letzten Zeile sehen wir das Resultat, einmal notiert mit dem Ausdruck $(n + 1)$ und einmal mit der Variable k .

Es kommt genau der gewünschte Schlussausdruck heraus! Die Summe von 1 bis k ist gleich $\frac{k(k+1)}{2}$ resp. die Summe von 1 bis $n + 1$ ist gleich $\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$.

Abschluss des Beweises: Stimmt die Aussage (1) für die Zahl n , so stimmt sie gemäss Induktionsschritt auch für die Zahl $n + 1$. Und da wir in der Verankerung gesehen haben, dass sie für $n = 1$ bereits korrekt ist, muss sie nun auch für alle $n > 1$ stimmen, also für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig sein.

Wir erkennen die "Eleganz" der vollständigen Induktion. Es ist quasi eine *rekursive* Beweisführung, die die Richtigkeit für die Zahl $n + 1$ auf die Richtigkeit für die Zahl n zurückführt.

2 Allgemeines zur vollständigen Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren für Aussagen über alle natürlichen oder ganzen Zahlen ab irgendeinem Startwert. Es besteht aus zwei Schritten:

1. **Induktionsverankerung (V):** Zeige die Richtigkeit der Aussage für einen konkreten Startwert (sehr oft $n = 0$ oder $n = 1$).
2. **Induktionsschritt (S):** Zeige, dass wenn die Aussage für eine bestimmte Zahl n gilt (Induktionsannahme (A)), dass sie dann auch für die Zahl $n + 1$ richtig ist.

Sind die Verankerung und der Schritt korrekt, so gilt die Aussage für alle Zahlen n ab dem Startwert.

Typische Einsatzfelder: Summenformeln, Teilbarkeit, Ungleichungen/Abschätzungen, rekursiv definierte Folgen (z.B. Fibonacci), kombinatorische Identitäten.

Notiz zur Induktionsannahme: Im Einführungsbeispiel hatten wir zur Verdeutlichung den zusätzlichen Schritt der *Induktionsannahme* (A) notiert. Diese explizite Deklaration werden wir in Zukunft in aller Regel weglassen, weil sie genau der zu beweisenden Aussage entspricht. Es ist aber trotzdem nützlich, diese Annahme im Hinterkopf zu behalten, denn im Induktionsschritt müssen wir sie zwingend verwenden!