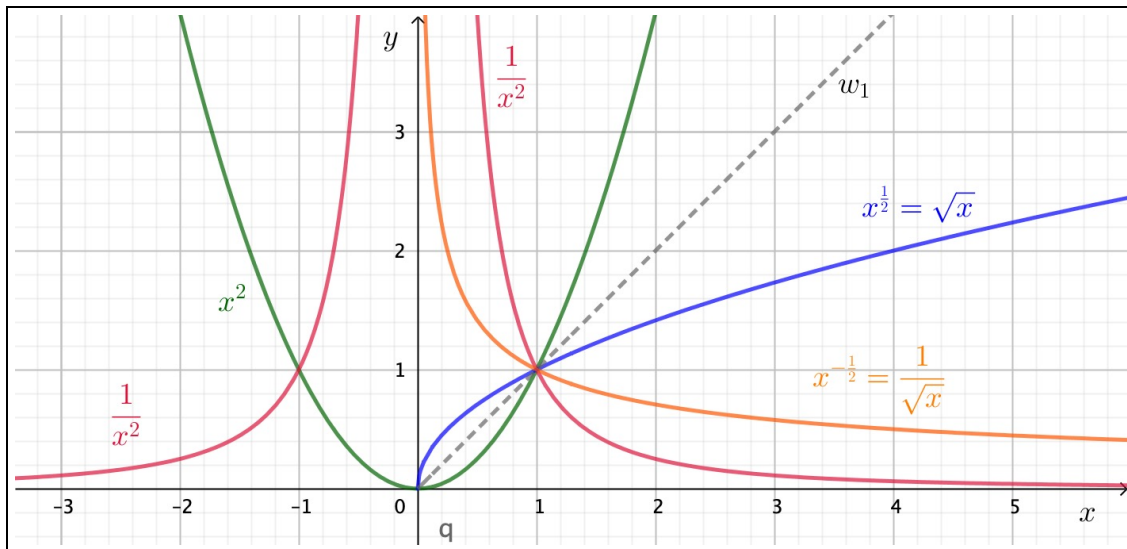


Übungen zur Integralrechnung – Lösungen Serie 0

1. Ableitungen von Potenzfunktionen

(a) Die vier Funktionsgraphen sehen folgendermassen aus:



Je zwei Funktionen sind auf dem Bereich $x > 0$ Umkehrfunktionen zueinander: x^2 und $\sqrt{x}$ sowie $\frac{1}{x^2}$ und $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Die Graphen der beiden Funktionen gehen durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden w_1 des 1. Quadranten ineinander über.

(b) Es ergeben sich die folgenden Ableitungen:

$$\begin{aligned} [3x^2]' &= 6x & \left[\frac{2}{x}\right]' &= [2x^{-1}]' = -2x^{-2} = -\frac{2}{x^2} & [4\sqrt{x}]' &= [4x^{\frac{1}{2}}]' = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\ [155c]' &= 0 & [13x]' &= 13 & \left[-\frac{3}{x^2}\right]' &= [-3x^{-2}]' = 6x^{-3} = \frac{6}{x^3} \\ [6\sqrt[3]{x}]' &= [6x^{\frac{1}{3}}]' = 2x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} & [12\sqrt[4]{x^3}]' &= [12x^{\frac{3}{4}}]' = 9x^{-\frac{1}{4}} = \frac{9}{\sqrt[4]{x}} \end{aligned}$$

(c) Hier die drei Ableitungen zum auswendig wissen:

$$\left[\frac{1}{x}\right]' = -\frac{1}{x^2} \quad \left[\frac{1}{x^2}\right]' = -\frac{2}{x^3} \quad [\sqrt{x}]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Ableitungen elementarer Funktionen

Sinusfkt.: $[\sin x]' = \cos x$

Exponentialfkt.: $[3^x]' = 3^x \cdot \ln 3$

Lineare Fkt.: $[-3x - 4]' = -3$

Logarithmusfkt.: $[2 \ln x]' = \frac{2}{x}$

Wurzelfkt.: $[\sqrt{7x}]' = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{x}}$

Tangensfkt.: $[\tan x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Exponentialfkt.: $[3e^x]' = 3e^x$

Logarithmusfkt.: $[3 \log_2 x]' = \frac{3}{x \cdot \ln 2}$

Cosinusfkt.: $\left[\frac{1}{2} \cos x\right]' = -\frac{1}{2} \sin x$

Inverse Wurzelfkt.: $\left[\frac{2}{\sqrt{x^3}}\right]' = -\frac{3}{\sqrt{x^5}}$

Polynomfkt.: $\left[30x^5 + \frac{155}{2}x^4 + 50x^3 + 75x^2 + 155cx - \pi\right]' = 150x^4 + 310x^3 + 150x^2 + 150x + 155c$

3. Allgemeine Ableitungsregeln

- **Regel für additive Konstanten:** $[f(x) + c]' = f'(x)$
- **Regel für multiplikative Konstanten:** $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$
- **Summenregel:** $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- **Potenzregel:** $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$
- **Produktregel:** $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- **Quotientenregel:** $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$
- **Kettenregel:** $[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Notiere die rechten Seiten dieser Ableitungsregeln, sodass sie dir wieder ganz präsent sind.

4. Training von Produkt-, Quotienten und Kettenregel

$$a(x) = x \sin x \Rightarrow a'(x) = \underline{\underline{\sin x + x \cos x}}$$

$$b(x) = (3x + 2)\sqrt{x} \Rightarrow b'(x) = 3\sqrt{x} + \frac{3x + 2}{2\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}}$$

$$c(x) = \frac{5x}{x+1} \Rightarrow c'(x) = \frac{5(x+1) - 5x}{(x+1)^2} = \frac{5x + 5 - 5x}{(x+1)^2} = \underline{\underline{\frac{5}{(x+1)^2}}}$$

$$d(x) = (2x + 3)^3 \Rightarrow d'(x) = 3(2x + 3)^2 \cdot 2 = \underline{\underline{6(2x + 3)^2}}$$

$$e(x) = (x^2 + 2)^4 \Rightarrow e'(x) = 4(x^2 + 2)^3 \cdot 2x = \underline{\underline{8x(x^2 + 2)^3}}$$

$$f(x) = 3^x x^4 \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln 3 \cdot x^4 + 3^x \cdot 4x^3 = \underline{\underline{3^x x^3 (x \ln 3 + 4)}}$$

$$g(x) = \sin(\cos x) \Rightarrow g'(x) = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x) = \underline{\underline{-\sin x \cdot \cos(\cos x)}}$$

$$h(x) = \frac{1-x}{x+2} \Rightarrow h'(x) = \frac{-(x+2) - (1-x)}{(x+2)^2} = \frac{-x-2-1+x}{(x+2)^2} = \underline{\underline{-\frac{3}{(x+2)^2}}}$$

$$i(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow i'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{1 - 2 \ln x}{x^3}}}$$

$$j(x) = x^3 \log_4 x \Rightarrow j'(x) = 3x^2 \log_4 x + x^3 \cdot \frac{1}{x \ln 4} = x^2 \cdot \left(3 \log_4 x + \frac{1}{\ln 4}\right) = \underline{\underline{x^2 \cdot \frac{3 \ln x + 1}{\ln 4}}}$$

$$k(x) = \sqrt{6x-1} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{6x-1}} \cdot 6 = \underline{\underline{\frac{3}{\sqrt{6x-1}}}}$$

$$l(x) = \sqrt{3}\sqrt{x} \Rightarrow l'(x) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}}}$$

$$m(x) = \frac{e^x}{5x} \Rightarrow m'(x) = \frac{e^x \cdot 5x - e^x \cdot 5}{25x^2} = \frac{5e^x(x-1)}{25x^2} = \underline{\underline{\frac{e^x(x-1)}{5x^2}}}$$

$$n(x) = (2x+3)^{-1} \Rightarrow n'(x) = -(2x+3)^{-2} \cdot 2 = \underline{\underline{-\frac{2}{(2x+3)^2}}}$$

$$\begin{aligned}
o(x) &= \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^2 - 3x} \Rightarrow o'(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 3x) - (x^4 - 3x^2 + 2)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2} \\
&= \frac{4x^5 - 12x^4 - 6x^3 + 18x^2 - 2x^5 + 3x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 3x)^2} \\
&= \frac{2x^5 - 9x^4 + 9x^2 - 4x + 6}{(x^2 - 3x)^2} \\
p(x) &= \frac{3}{2 - 5x} \Rightarrow p'(x) = -\frac{3}{(2 - 5x)^2} \cdot (-5) = \frac{15}{(2 - 5x)^2} \\
q(x) &= \frac{3^x}{x^3} \Rightarrow q'(x) = \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot x^3 - 3^x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{3^x(x \ln 3 - 3)}{x^4} \\
r(x) &= \frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow r'(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{3x}} \\
s(x) &= \cos(x^2 - 1) \Rightarrow s'(x) = -\sin(x^2 - 1) \cdot 2x = \underline{\underline{-2x \sin(x^2 - 1)}} \\
t(x) &= x \ln x \Rightarrow t'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{1 + \ln x}} \\
u(x) &= \frac{e^x}{x^2} \Rightarrow u'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \underline{\underline{\frac{e^x(x - 2)}{x^3}}} \\
v(x) &= \frac{x}{\ln x} \Rightarrow v'(x) = \frac{\ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \underline{\underline{\frac{\ln(x) - 1}{(\ln x)^2}}} \\
w(x) &= (x + 1)e^x \Rightarrow w'(x) = e^x + (x + 1)e^x = \underline{\underline{e^x(x + 2)}} \\
y(x) &= \frac{x - 1}{e^x} \Rightarrow y'(x) = \frac{e^x - (x - 1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{1 - (x - 1)}{e^x} = \underline{\underline{\frac{2 - x}{e^x}}}
\end{aligned}$$

5. Tangentenbestimmung

- (a) Zu bestimmen sind zuerst der Funktionswert $f(-2)$ und dann die Steigung $m = f'(-2)$ des Graphen über der Stelle $x = -2$. Für letztere Berechnung muss die Funktion abgeleitet werden:

$$f(-2) = 4 + 6 + 1 = 11 \quad \text{und} \quad f'(x) = 2x - 3 \quad \text{sodass} \quad m = f'(-2) = -4 - 3 = -7$$

Nun verwenden wir den Ansatz für eine Gerade mit bestimmter Steigung $m = -7$ durch einen bestimmten Punkt $P = (-2, 11)$ und erhalten so direkt das gesuchte Ergebnis:

$$t(x) = m(x - x_P) + y_P = -7(x - (-2)) + 11 = -7x - 14 + 11 = \underline{\underline{-7x - 3}}$$

- (b) Wir gehen genau gleich vor wie unter (a):

$$f(-2) = \sqrt{-2 + 3} = 1 \quad \text{und} \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + 3}} \cdot 1 \quad \text{sodass} \quad m = f'(-2) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Beachte: Das $\cdot 1$ in $f'(x)$ entspricht der Ableitung von $x + 3$ (= innere Funktion von $\sqrt{x + 3}$). Es folgt:

$$t(x) = m(x - x_P) + y_P = \frac{1}{2}(x - (-2)) + 1 = \frac{1}{2}x + 1 + 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}x + 2}}$$

(c) Die Ableitung lautet:

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \Rightarrow f'(x) = \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{2}\right)$$

Damit folgt:

$$f(-2) = \sin\left(\frac{\pi \cdot (-2)}{2}\right) = \sin(-\pi) = 0$$

$$m = f'(-2) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot (-2)}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(-\pi) = \frac{\pi}{2} \cdot (-1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t(x) = m(x - x_P) + y_P = -\frac{\pi}{2}(x - (-2)) + 0 = \underline{\underline{-\frac{\pi}{2}x - \pi}}$$

(d) Auch hier leiten wir ab, setzen ein und finden für die Tangente:

$$f(-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2} \quad \text{und} \quad f'(-2) = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$\Rightarrow t(x) = t(x) = m(x - x_P) + y_P = \frac{1}{e^2}(x - (-2)) + \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2}x + \frac{2}{e^2} + \frac{1}{e^2} = \underline{\underline{\frac{1}{e^2}x + \frac{3}{e^2}}}$$

Hier noch die Funktionsgraphen aller vier Fälle inkl. angelegter Tangenten:

