

# Übungen zur Integralrechnung – Lösungen Serie 1

1. Für die Stammfunktionen findet man:

$$f(x) = 3x^2 \Rightarrow F(x) = x^3$$

$$h(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow H(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$j(x) = 2 \Rightarrow J(x) = 2x$$

$$l(x) = \sin x \Rightarrow L(x) = -\cos x$$

$$n(x) = \sqrt{x} \Rightarrow N(x) = \frac{2}{3} x\sqrt{x}$$

$$g(x) = 2x^4 \Rightarrow G(x) = \frac{2}{5} x^5$$

$$i(x) = \frac{1}{4x^2} \Rightarrow I(x) = -\frac{1}{4x}$$

$$k(x) = 4x \Rightarrow K(x) = 2x^2$$

$$m(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow M(x) = 2 \ln x$$

$$o(x) = \frac{1}{3\sqrt{x}} \Rightarrow O(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x}$$

2. Für die Integrale erhalten wir:

$$(a) \int_{-1}^1 e^x dx = e^x \Big|_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} = \underline{\underline{\frac{e^2 - 1}{e}}}$$

$$(b) \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$(c) \int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[ \frac{1}{3} x^3 + x \right] \Big|_0^2 = \frac{8}{3} + 2 - 0 = \underline{\underline{\frac{14}{3}}}$$

$$(d) \int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^3 = -\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1}\right) = -\left(-\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

3. Ich notiere zuerst ein paar Anmerkungen zu den verschiedenen Aufgaben:

- Bei den Resultaten ist die Schreibweise  $1\frac{13}{60}$  praktisch um rasch zu kontrollieren, ob sie mit der markierten Fläche übereinstimmen können. In den Darstellungen steht ein ganzes Häuschen ja jeweils für die Fläche 1. Die reine Bruchschreibweise  $\frac{73}{60}$  würde als Resultatangabe aber ausreichen.
- Bei der Aufgabe oben in der Mitte (Funktion  $g(x)$ ) erkennt man leicht die Geradensteigung  $\frac{1}{3}$  und den  $y$ -Achsenabschnitt 3. Natürlich könnte man die Fläche bei dieser Aufgabe auch aus der Trapezformel erhalten, was vermutlich einfacher wäre:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\frac{10}{3} + \frac{13}{3}}{2} \cdot 3 = \frac{\frac{23}{3}}{2} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{23}{2}}}$$

- Für die quadratische Funktion  $h(x)$  oben rechts setzen wir in der Nullstellenform an:

$$h(x) = a(x+1)(x-4)$$

An der Stelle  $x = 0$  muss sich der Wert  $h(0) = -4$  ergeben. Das ist für  $a = 1$  der Fall. Ins Integral setzen wir dann die ausmultiplizierte Form ein.

Da sich die Fläche  $A$  unterhalb der  $x$ -Achse befindet, muss der Betrag des Integrals genommen werden.

- Bei den beiden Aufgaben unten links und unten in der Mitte ist jeweils eine Funktionendifferenz zu bilden, über die dann integriert wird. Unten links ist das z.B.  $j(x) - i(x)$ , also obere Funktion minus untere Funktion.

• **Achtung, die letzte Aufgabe zu  $l(x)$  ist happig, was die Ausrechnung angeht!**

Bei der Funktion  $l(x)$  liegt ein Teil der Fläche ober- und der andere unterhalb der  $x$ -Achse. In diesem Fall ist das Integral aufzuteilen, denn ansonsten würde die positive Fläche oberhalb der  $x$ -Achse einfach zur negativen unterhalb addiert werden. So würden wir einen klar zu geringen Wert für die Fläche erhalten. Es sind also zwei Integrale zu berechnen. Von demjenigen unterhalb der  $x$ -Achse ist dann der Betrag zu nehmen und dann müssen beide Werte aufsummiert werden.

Zuerst muss aber noch der linke Integrationsrand der positiven Fläche, also die dritte Nullstelle der Funktion bestimmt werden. Das machen wir via Faktorisierung resp. Zweiklammeransatz:

$$i(x) = 4x^3 - x^2 - 3x = x(4x^2 - x - 3) = x(x-1)(4x+3)$$

Die nicht so klar ersichtliche Nullstelle liegt also bei  $x = -\frac{3}{4}$ .

**Tipp zu Ausrechnung:** an geeigneter Stelle  $(-\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$  ausklammern!

Und hier nun die expliziten Ausrechnungen:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 \left( \frac{x^4}{4} - x^2 + 2 \right) dx = \left[ \frac{1}{20} x^5 - \frac{1}{3} x^3 + 2x \right] \Big|_1^2 = \frac{32}{20} - \frac{8}{3} + 4 - \left( \frac{1}{20} - \frac{1}{3} + 2 \right) \\ &= \frac{96 - 160 + 240 - 3 + 20 - 120}{60} = \frac{73}{60} = 1 \frac{13}{60} \approx 1.22 \end{aligned}$$

$$\int_1^4 g(x) dx = \int_1^4 \left( \frac{1}{3} x + 3 \right) dx = \left[ \frac{1}{6} x^2 + 3x \right] \Big|_1^4 = \frac{16}{6} + 12 - \frac{1}{6} - 3 = \dots = \frac{23}{2} = \underline{\underline{11.5}}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^4 h(x) dx \right| &= \left| \int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4) dx \right| = \left| \left[ \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 - 4x \right] \Big|_{-1}^4 \right| \\ &= \left| \frac{64}{3} - 24 - 16 - \left( -\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4 \right) \right| = \left| \frac{65}{3} - 44 + \frac{3}{2} \right| = \dots = \left| -20 \frac{5}{6} \right| = \underline{\underline{20 \frac{5}{6}}} \approx 20.83 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_1^4 (j(x) - i(x)) dx &= \int_1^4 \left( 5 - x - \frac{4}{x} \right) dx = \left[ 5x - \frac{1}{2} x^2 - 4 \ln x \right] \Big|_1^4 \\ &= 20 - 8 - 4 \ln 4 - \left( 5 - \frac{1}{2} + 4 \ln 1 \right) = \underline{\underline{\frac{15}{2} - 4 \ln 4}} \approx 1.95 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1 - k(x)) dx = \int_0^1 (1 - x^3) dx = \left[ x - \frac{1}{4} x^4 \right] \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{4} - 0 = \underline{\underline{\frac{3}{4}}} \approx 0.75$$

$$\begin{aligned} \int_{-3/4}^0 l(x) dx &= \int_{-3/4}^0 (4x^3 - x^2 - 3x) dx = \left[ x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right] \Big|_{-3/4}^0 \\ &= 0 - \left( \left( -\frac{3}{4} \right)^4 - \frac{1}{3} \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)^3 - \frac{3}{2} \cdot \left( -\frac{3}{4} \right)^2 \right) = - \left( -\frac{3}{4} \right)^2 \cdot \left( \left( -\frac{3}{4} \right)^2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \right) \\ &= -\frac{9}{16} \cdot \left( \frac{9}{16} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{9 + 4 - 24}{16} = -\frac{9}{16} \cdot \frac{-11}{16} = \underline{\underline{\frac{99}{256}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 l(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 (4x^3 - x^2 - 3x) dx \right| = \left| \left[ x^4 - \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right] \Big|_0^1 \right| \\ &= \left| 1 - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} - 0 \right| = \left| \frac{6 - 2 - 9}{6} \right| = \left| -\frac{5}{6} \right| = \underline{\underline{\frac{5}{6}}} \\ \Rightarrow \int_{-3/4}^0 l(x) dx + \left| \int_0^1 l(x) dx \right| &= \frac{99}{256} + \frac{5}{6} = \dots = \frac{297 + 640}{768} = \underline{\underline{\frac{937}{768}}} \approx 1.22 \end{aligned}$$

4. Unter Ausnützung der Symmetrieeigenschaften sind diese Aufgaben oftmals ziemlich rasch gelöst:

(a) Die Funktion ist gerade, d.h., ihr Graph ist symmetrisch zur  $y$ -Achse. Damit folgt:

$$\int_{-3}^3 (9 - x^2) dx = 2 \cdot \int_0^3 (9 - x^2) dx = 2 \cdot \left[ 9x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^3 = 2 \cdot (27 - 9 - 0) = 2 \cdot 18 = \underline{\underline{36}}$$

(b) Der Tangens ist eine ungerade Funktion. Ihr Graph ist also punktsymmetrisch zum Ursprung. Da auch die Integrationsgrenzen symmetrisch zum Ursprung sind, ergeben sich gleich grosse Flächen unter- und oberhalb der  $x$ -Achse. Das Integral muss deshalb 0 ergeben! Es ist keine Rechnung nötig und wir müssen uns nicht den Kopf darüber zerbrechen, wie wohl die Stammfunktion des Tangens lautet.

(c) Wieder eine gerade Funktion. Für das Integral folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \left( -\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right) dx &= 2 \cdot \int_0^2 \left( -\frac{1}{4} x^4 + x^2 \right) dx = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{20} x^5 + \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 = 2 \cdot \left( -\frac{32}{20} + \frac{8}{3} - 0 \right) \\ &= 2 \cdot \left( -\frac{8}{5} + \frac{8}{3} \right) = 16 \cdot \left( -\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) = 16 \cdot \frac{-3+5}{15} = 16 \cdot \frac{2}{15} = \frac{32}{15} \approx 2.13 \end{aligned}$$

(d) Bei dieser Aufgabe gibt es scheinbar keine Symmetrie, ausser dass die Integrationsgrenzen symmetrisch zu  $x = 0$  sind. Allerdings darf man Integrale über Summen oder Differenzen aufteilen. Tut man dies, so kann man die Punktsymmetrie von  $x$  und die Achsensymmetrie von  $x^2$  doch ausnutzen:

$$\int_{-2}^2 (x^2 - x) dx = \int_{-2}^2 x^2 dx - \underbrace{\int_{-2}^2 x dx}_{=0} = 2 \cdot \int_0^2 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^2 = \frac{2}{3} (8 - 0) = \frac{16}{3} \approx 5.33$$

(e) Der Cosinus-Graph ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse, aber die Integrationsgrenzen sind es nicht. Allerdings besitzt die Cosinuskurve zwischen  $-\pi$  und  $0$  gleich viel Fläche unterhalb wie oberhalb der  $x$ -Achse. Das Integral über diesen Abschnitt ergibt somit  $0$ , sodass wir folgern:

$$\int_{-\pi}^{\pi/2} \cos x dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\pi/2} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

(f) Beim Ableiten von  $e^{-x}$  entsteht als innere Ableitung der Faktor  $(-1)$ . Folglich ist  $-e^{-x}$  eine Stammfunktion von  $e^{-x}$ :

$$[-e^{-x}]' = -e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x}$$

Damit lässt sich das Integral berechnen:

$$\int_{-1}^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_{-1}^1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} - \frac{\frac{1}{e} - e}{2} = e - \frac{1}{e} = \underline{\underline{\frac{e^2 - 1}{e}}}$$

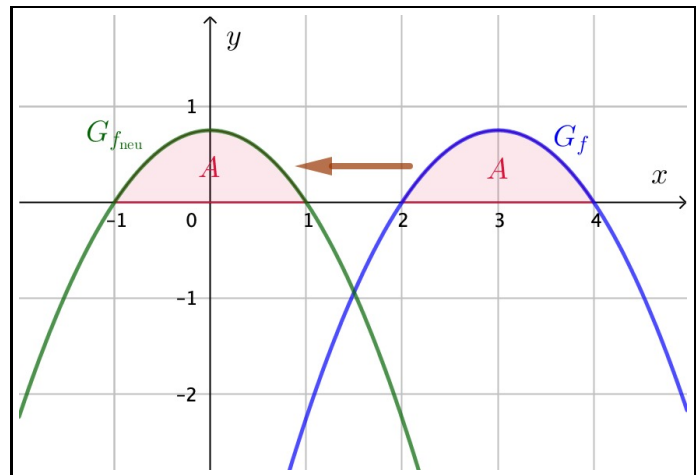
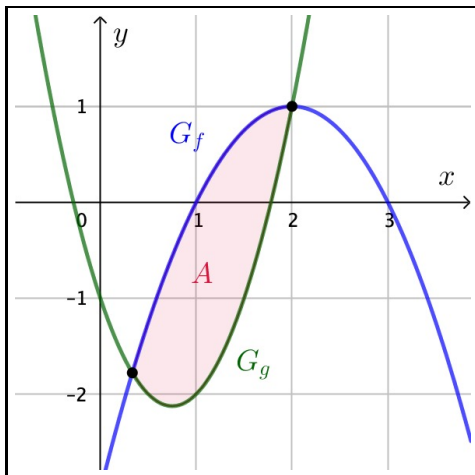
**P.S.:** Weder  $e^x$ , noch  $e^{-x}$  sind gerade oder ungerade, wohl aber  $e^x + e^{-x}$ , denn wenn man  $x$  durch  $-x$  ersetzt, ergibt sich wieder derselbe Ausdruck.

5. (a) Unten links sehen wir die Situation beider Graphen. Die Schnittstellen kann man daraus zwar erahnen, wir sollten sie aber doch sauber berechnen. D.h., wir setzen die Funktionen ineinander gleich:

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Rightarrow -x^2 + 4x - 3 = 2x^2 - 3x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (3x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \underline{x = \frac{1}{3} \text{ oder } x = 2} \end{aligned}$$

Der  $G_f$  verläuft oberhalb von  $G_g$ . Somit folgt für die Zwischenfläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_{1/3}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{1/3}^2 (-x^2 + 4x - 3 - 2x^2 + 3x + 1) dx = \int_{1/3}^2 (-3x^2 + 7x - 2) dx \\ &= \left[ -x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x \right]_{1/3}^2 = -8 + 14 - 4 - \left( -\frac{1}{27} + \frac{7}{18} - \frac{2}{3} \right) = 2 + \frac{2 - 21 + 36}{54} = 2 \frac{17}{54} \approx 2.31 \end{aligned}$$



- (b) Die bis auf den Parameter  $a$  gegebene Nullstellenform verrät uns sofort die Integrationsgrenzen.  $a$  ist der Öffnungsparameter der Parabel, der sie vertikal strecken und spiegeln kann. So kann die Fläche zwischen Graph und  $x$ -Achse variiert werden. Bei der nach unten geöffneten Parabel ist  $a < 0$  und die Fläche liegt oberhalb der  $x$ -Achse. So brauchen wir beim Integral sicher keine Betragsstriche zu setzen.

$$\begin{aligned} A &= \int_2^4 a(x-2)(x-4) dx = a \cdot \int_2^4 (x^2 - 6x + 8) dx = a \cdot \left[ \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x \right]_2^4 \\ &= a \cdot \left( \frac{64}{3} - 48 + 32 - \frac{8}{3} + 12 - 16 \right) = a \cdot \left( \frac{56}{3} - 20 \right) = a \cdot \frac{-4}{3} \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Den richtigen Graphen siehst du oben rechts.

- (c) In der Lösung zu (b) oben rechts wird auch gezeigt, dass man den Graphen ohne Veränderung der Öffnung  $a$  und damit auch ohne Veränderung der Fläche  $A$  nach links verschieben könnte, bis der Scheitelpunkt der Parabel auf der  $y$ -Achse liegt. Dann ist der Graph achsensymmetrisch und die Integralberechnung dürfte besonders einfach sein. In der Nullstellenform ist die Linksverschiebung um drei Einheiten gar kein Problem. Wir ersetzen alle  $x$  durch  $x + 3$  und erhalten:

$$f(x) = a(x-2)(x-4) \longrightarrow f_{\text{neu}}(x) = a(x+1)(x-1) = a(x^2 - 1)$$

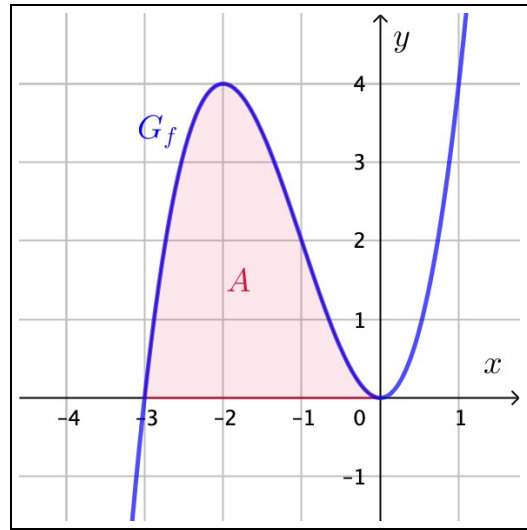
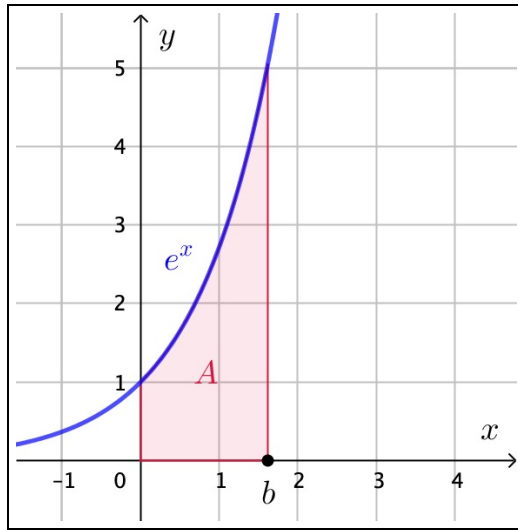
Damit geht das Integrieren tatsächlich viel leichter, weil sich einfachere Zahlenwerte ergeben und wir zudem die Achsensymmetrie ausnützen können:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^1 a(x^2 - 1) dx = 2a \cdot \int_0^1 (x^2 - 1) dx = 2a \cdot \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^1 \\ &= 2a \cdot \left( \frac{1}{3} - 1 - 0 \right) = 2a \cdot \left( -\frac{2}{3} \right) = -\frac{4}{3}a \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = -\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

Je mehr Übung wir haben, umso mehr können uns derartige Vereinfachungen von alleine einfallen. Dann rechnen wir vielleicht von Anfang an wie unter (c) anstatt wie unter (b)!

- (d) Der Graph unten links zeigt die Situation. Da wir im Moment noch nicht wissen, bis wohin wir zu integrieren haben, setzen wir für die obere Integrationsgrenze einfach den Parameter  $b$  ein und erhalten:

$$A = \int_0^b e^x dx = e^x \Big|_0^b = e^b - e^0 = e^b - 1 \stackrel{!}{=} 1000 \Leftrightarrow e^b = 1001 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = \ln 1001 \approx 6.91}}$$



- (e) i. Für  $a = 3$  sind  $x = -3$  und  $x = 0$  die Schnittstellen mit der  $x$ -Achse und somit die Integrationsgrenzen (siehe Grafik oben in der Mitte). Für die Fläche erhalten wir:

$$A = \int_{-3}^0 (x+3)x^2 dx = \int_{-3}^0 (x^3 + 3x^2) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_{-3}^0 = \dots 0 - \left( \frac{81}{4} - 27 \right) = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$$

- ii. Wenn wir den Wert für  $a$  nicht kennen, müssen wir halt unter Verwendung des Parameters  $a$  integrieren. Gemäss Vorgabe ist  $a > 0$ . Wie wir unter i. bereits gesehen haben, entsteht so eine Fläche oberhalb der  $x$ -Achse, sodass das Integral auch ohne Betragsstriche positiv herauskommt und ich es gleich 108 setzen darf. Die untere Integrationsgrenze liegt bei  $-a$ :

$$A = \int_{-a}^0 (x^3 + ax^2) dx = \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 \right]_{-a}^0 = 0 - \left( \frac{a^4}{4} - \frac{a^4}{3} \right) = -a^4 \cdot \frac{3-4}{12} = \frac{a^4}{12} \stackrel{!}{=} 108$$

$$\Rightarrow a^4 = 12 \cdot 108 = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 3^3 = 2^4 \cdot 3^4 \Rightarrow a = 2 \cdot 3 = \underline{\underline{6}}$$

- (f) Rechts von der Schnittstelle, die ganz offensichtlich bei  $x_S = 1$  liegt, verläuft  $G_g$  oberhalb von  $G_f$ . Wir wissen nicht, bis zu welcher Stelle  $c$  zu integrieren ist. Das ist unsere Unbekannte. Aber wir wissen, dass das Integral von 1 bis  $c$  den Wert 3 haben muss. Daraus folgt:

$$\int_1^c (g(x) - f(x)) dx = \int_1^c (x^2 - \sqrt{x}) dx = \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_1^c = \frac{c^3}{3} - \frac{2c\sqrt{c}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \stackrel{!}{=} 3$$

$$\Leftrightarrow c^3 - 2c\sqrt{c} + 1 = 9 \Leftrightarrow c^3 + 2c\sqrt{c} - 8 = 0$$

Nun substituieren wir  $d = c\sqrt{c}$  und somit  $d^2 = c^3$ :

$$d^2 + 2d - 8 = 0 \Leftrightarrow (d+2)(d-4) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{d = -2 \text{ oder } d = 4}}$$

Fürs Zurücksetzen in die Substitution kommt die negative Lösung nicht in Frage. Somit folgt:

$$d^2 = c^3 \Rightarrow c = \sqrt[3]{d^2} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \underline{\underline{2\sqrt[3]{2}}} \approx 2.52$$

6. Die Ableitung der Exponentialfunktion  $f(x) = a^x$  lautet:

$$[a^x]' = a^x \cdot \ln a$$

Damit muss  $F(x) = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x$  die Stammfunktion von  $f(x) = a^x$  sein, denn so ist:

$$\left[ \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \right]' = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x \cdot \ln a = a^x$$

Für die drei Integrale folgt damit:

$$(a) \quad \int_1^2 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} \cdot (4 - 2) = \underline{\underline{\frac{2}{\ln 2}}}$$

$$(b) \quad \int_1^2 \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2^{-1}} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4 \cdot (-\ln 2)} = \underline{\underline{\frac{1}{4 \ln 2}}}$$

$$(c) \quad \int_0^{\log_5 2} 5^x dx = \frac{1}{\ln 5} \cdot 5^x \Big|_0^{\log_5 2} = \frac{1}{\ln 5} \cdot (5^{\log_5 2} - 5^0) = \frac{1}{\ln 5} \cdot (2 - 1) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 5}}}$$

**Bemerkung:** Bei (b) haben wir das 3. Logarithmusgesetz verwendet:  $\log_a b^c = c \cdot \log_a b$ .

7. Die Lösungen zu den vier Diagrammen lauten:

**Oben links:** Die beiden Graphen gehören zu  $f(x) = \sin x$  und  $g(x) = \cos x$ . Die sichtbaren Schnittpunkte sind bei  $\frac{\pi}{4}$  und  $\frac{5\pi}{4}$ . Für die Zwischenfläche ergibt sich:

$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x) dx = [-\cos x - \sin x] \Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} \\ &= -\cos \frac{5\pi}{4} - \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{2\sqrt{2}}} \approx 2.83 \end{aligned}$$

**Oben rechts:** Zunächst müssen wir die quadratische Funktion  $h(x)$  bestimmen. Ihre Nullstellenform lautet offensichtlich:  $h(x) = a(x-2)(x-6)$ . An der Stelle  $x = 0$  muss sich der Wert 3 ergeben, also  $h(0) = a \cdot (-2) \cdot (-6) = 12a \stackrel{!}{=} 3$ . Somit ist  $a = \frac{1}{4}$  und  $h(x) = \frac{1}{4}(x-2)(x-6) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ .

Es müssen zwei Integrale bestimmt werden, das erste von 0 bis 2 und das zweite von 2 bis 6:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx &= \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right] \Big|_0^2 = \frac{2}{3} - 4 + 6 - 0 = \frac{8}{3} \\ \left| \int_2^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - 2x + 3\right) dx \right| &= \left| \left[\frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x\right] \Big|_2^6 \right| = \left| 18 - 36 + 18 - \frac{2}{3} + 4 - 6 \right| \\ &= \left| -\frac{2}{3} - 2 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3} = \underline{\underline{5\frac{1}{3}}} \approx 5.33 \end{aligned}$$

**Unten links:** Diese Fläche setzt sich aus drei berechenbaren Teilflächen zusammen. Von  $x = 0$  bis  $x = 1$ , von  $x = 1$  bis  $x = 2$  und von  $x = 2$  bis  $x = 3$ .

Zuerst benötigen wir die Gleichungen zu den beiden Geraden  $j$  und  $l$ :

$$j(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad l(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

Damit lassen sich die drei Teilflächen bestimmen:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^1 (l(x) - j(x)) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 + (x-1)^3\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x + 1 + x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) dx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 - 3x^2 + \frac{7}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{7}{4}x^2\right] \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 1 + \frac{7}{4} = \frac{8}{4} - 1 = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 (l(x) - j(x)) \, dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{2}x + 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \, dx = \int_1^2 \frac{3}{2} \, dx = \frac{3}{2}x \Big|_1^2 = 3 - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \\
A_3 &= \int_2^3 (k(x) - i(x)) \, dx = \int_2^3 \left( -x^2 + 4x - 2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) \, dx = \int_2^3 \left( -x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2} \right) \, dx \\
&= \left[ -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^2 - \frac{3}{2}x \right] \Big|_2^3 = -9 + \frac{63}{4} - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} - 7 + 3 = \dots = \underline{\underline{\frac{11}{12}}} \\
\Rightarrow A &= A_1 + A_2 + A_3 = 1 + \frac{3}{2} + \frac{11}{12} = \frac{12 + 18 + 11}{12} = \frac{41}{12} = 3 \frac{5}{12} \approx 3.42
\end{aligned}$$

**Unten rechts:** Zur Gerade gehört die lineare Funktion  $m(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ . Die drei Schnittstellen der beiden Graphen sind bereits ersichtlich. Wiederum muss für jede der beiden Teilflächen separat ein Integral berechnet werden:

$$A_1 = \int_{-1}^1 \left( \underbrace{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - x + \frac{3}{2}}_{=n(x)} - \underbrace{\left( -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right)}_{=m(x)} \right) \, dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2}x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 1 \right) \, dx$$

Im Prinzip könnte ich dieses Integral ja in mehrere Integrale mit den unterschiedlichen Potenzen von  $x$  zerlegen. Dann wären alle Integrale mit ungerader Potenz, also  $x^3$  und  $x$ , punktsymmetrisch zum Ursprung und würden wegen der ebenfalls symmetrischen Integrationsgrenzen 0 ergeben. Dies wissend, darf ich obiges Integral sofort vereinfachen, indem ich die ungeraden Potenzen einfach rausstreiche. Ausserdem kann ich bei den geraden Potenzen von  $x$  die Achsensymmetrie ausnützen:

$$A_1 = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) \, dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^2 + 1) \, dx = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{3}x^3 + x \right] \Big|_0^1 = 2 \cdot \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) = 2 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Bei der Berechnung der kleineren Teilfläche liegt nun die Gerade  $G_m$  oben. Das bedeutet, die Funktionsdifferenz aus der ersten Berechnung muss nun gerade umgekehrt werden:  $m(x) - n(x)$  statt  $n(x) - m(x)$ . Wir brauchen dazu lediglich bei allen Gliedern das Vorzeichen zu wechseln:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_1^2 \left( -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x - 1 \right) \, dx = \left[ -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - x \right] \Big|_1^2 \\
&= -2 + \frac{8}{3} + 1 - 2 + \frac{1}{8} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \dots = \underline{\underline{\frac{5}{24}}}
\end{aligned}$$

Somit folgt für die Gesamtfläche:

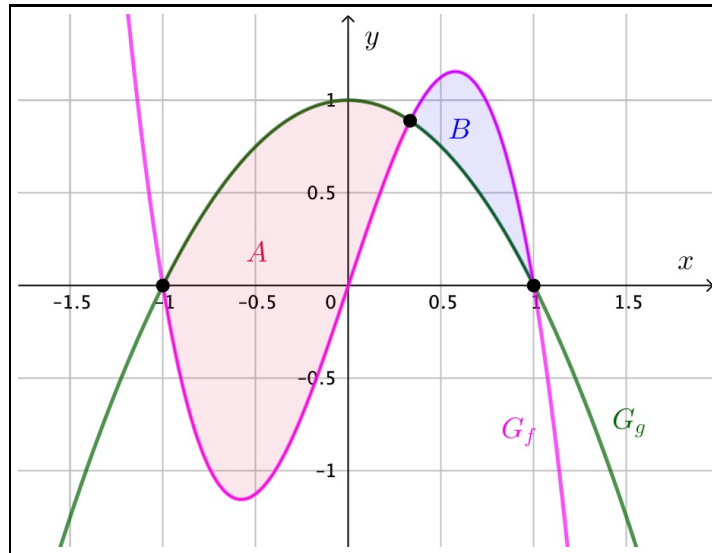
$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{5}{24} = \frac{32 + 5}{24} = \frac{37}{24} = 1 \frac{13}{24} \approx 1.54$$

8. Gut erraten lässt sich die Schnittstelle  $x = 1$ , denn dort haben beide Funktion ganz offensichtlich den Wert 0. Dasselbe gilt für  $x = -1$ .

Da es sich bei  $f(x)$  um eine kubische Funktion handelt, könnte es eine dritte Schnittstelle geben. Dazu faktorisieren wir die Funktionsdifferenz:

$$f(x) - g(x) = -3x^3 + 3x - (1 - x^2) = -3x^3 + x^2 + 3x - 1 = \dots = (x - 1)(x + 1)(-3x + 1)$$

Es gibt also eine dritte Schnittstelle bei  $x = \frac{1}{3}$ . Davon können wir uns in GeoGebra auch rasch überzeugen.



Wir berechnen separat die beiden Zwischenflächen:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-1}^{1/3} (g(x) - f(x)) \, dx = \int_{-1}^{1/3} (3x^3 - x^2 - 3x + 1) \, dx = \left[ \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right] \Big|_{-1}^{1/3} \\
 &= \frac{3}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{3}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} + 1 = \dots = \frac{128}{81} = \frac{2^7}{3^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \int_{1/3}^1 (f(x) - g(x)) \, dx = \int_{1/3}^1 (-3x^3 + x^2 + 3x - 1) \, dx = \left[ -\frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x \right] \Big|_{1/3}^1 \\
 &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 1 + \frac{3}{4 \cdot 3^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{3}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{20}{81} = \frac{2^2 \cdot 5}{3^4}
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für das Verhältnis der beiden Teilflächen:

$$A : B = \frac{A}{B} = \frac{\frac{2^7}{3^4}}{\frac{2^2 \cdot 5}{3^4}} = \frac{2^7}{3^4} \cdot \frac{3^4}{2^2 \cdot 5} = \frac{2^5}{5} = \frac{32}{5} = \underline{\underline{32 : 5}} = \underline{\underline{6.4 : 1}}$$