

Übungen zur Integralrechnung – Lösungen Serie 2

1. Für die Integrale erhalten wir:

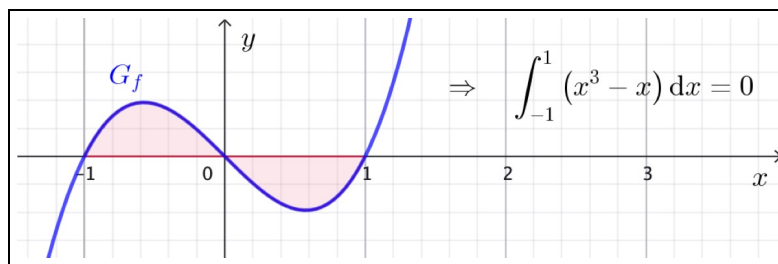
$$(a) \int_1^5 4 \, dx = 4x \Big|_1^5 = 20 - 4 = \underline{\underline{16}}$$

$$(b) \int_1^{10} \frac{1}{x^2} \, dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = \underline{\underline{\frac{9}{10}}}$$

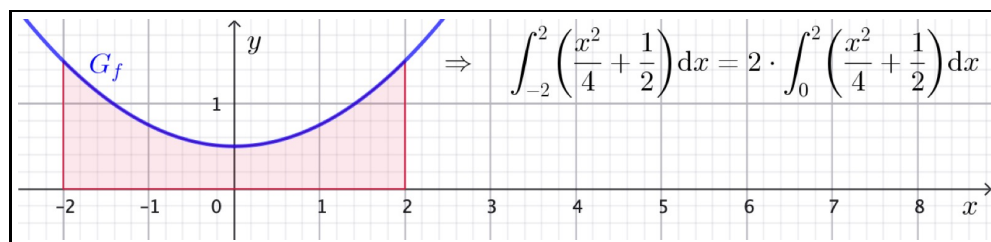
$$(c) \int_1^e \frac{1}{x} \, dx = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$(d) \int_{-1}^1 (1-x) \, dx = \left[x - \frac{1}{2} x^2 \right] \Big|_{-1}^1 = 1 - \frac{1}{2} - \left((-1) - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{2}}$$

2. (a) $x^3 - x$ ist eine *ungerade* Funktion, weil sie ausschliesslich ungerade Potenzen von x enthält. Ihr Graph ist somit *punktsymmetrisch* zum Ursprung. Werden zu $x = 0$ symmetrische Integrationsgrenzen vorgegeben, so gibt es aufgrund dieser Symmetrie gleich viel Fläche oberhalb der x -Achse wie unterhalb, sodass das Integral insgesamt den Wert 0 erhalten muss:



- (b) Wir betrachten eine ganze Periode der unmodifizierten Cosinusfunktion, also von 0 bis 2π . Dabei gibt es aus Symmetriegründen gleich viel Fläche unterhalb der x -Achse wie oberhalb. Auch dieses Integral muss folglich 0 ergeben.
- (c) $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}$ ist eine *gerade* Funktion, weil sie ausschliesslich gerade Potenzen von x enthält. Ihr Graph ist somit *achsensymmetrisch* zur y -Achse. Wie bei (a) sind zu $x = 0$ symmetrische Integrationsgrenzen vorgegeben. Damit ist die Fläche links der y -Achse genau gleich gross wie diejenige rechts und wir können somit die Fläche von $x = 0$ bis $x = 2$ einfach verdoppeln, um das gesamte Integral zu erhalten:



$$\int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \right) \, dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \right) \, dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right) \, dx = \left[\frac{x^3}{6} + x \right] \Big|_0^2 = \frac{8}{6} + 2 - 0 = \underline{\underline{\frac{10}{3}}}$$

- (d) Hier wird über $\frac{3}{4}$ einer Periode der unmodifizierten Sinusfunktion integriert. Dabei liegt doppelt soviel Fläche oberhalb der x -Achse (von $x = 0$ bis $x = \pi$) wie unterhalb (von π bis $\frac{3\pi}{2}$). Somit folgt:

$$\int_0^{3\pi/2} \sin x \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0) = -0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

3. Die Integrationsgrenzen sind in beiden Aufgaben symmetrisch zu $x = 0$. Somit fallen ungerade Funktionsanteile raus und bei geraden Funktionsanteilen kann das Integral von $-a$ bis $+a$ als das Doppelte des Integrals von 0 bis a notiert werden.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos x + \tan x) dx &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos x dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/4} \cos x dx \\ &= 2 \cdot \sin x \Big|_0^{\pi/4} = 2 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin 0 \right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 \right) = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \int_{-2}^2 \left(x^3 + \frac{x^2}{2} + 2x - 1 \right) dx &= \int_{-2}^2 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = 2 \cdot \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right) dx = \int_0^2 (x^2 - 2) dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} - 2x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3} - 4 - 0 = \underline{\underline{-\frac{4}{3}}} \end{aligned}$$

4. Zunächst müssen die Nullstellen bestimmt werden, denn sie bilden die Integrationsgrenzen:

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 10 = 2(x^2 - 4x - 5) = 2(x+1)(x-5) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad \text{und} \quad x_2 = 5$$

Die Parabel ist nach oben geöffnet, sodass die zu berechnende Fläche unterhalb der x -Achse liegt und das Integral folglich negativ herauskommt. Wir notieren daher den Betrag des Integrals:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_{-1}^5 2(x^2 - 4x - 5) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[\frac{1}{3} x^3 - 2x^2 - 5x \right] \Big|_{-1}^5 \right| = 2 \cdot \left| \frac{125}{3} - 50 - 25 + \frac{1}{3} + 2 - 5 \right| \\ &= 2 \cdot \left| \frac{126}{3} - 78 \right| = 2 \cdot |42 - 78| = 2 \cdot 36 = \underline{\underline{72}} \end{aligned}$$

5. (a) Für $f(x)$ setzen wir mit dem Scheitelpunkt in $(4, 4)$ die Scheitelpunktform an und verwenden danach, dass $f(0) = 0$ sein muss:

$$f(x) = a(x-4)^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad f(0) = a(-4)^2 + 4 = 16a + 4 \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$$

Somit erhalten wir für $f(x)$:

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-4)^2 + 4 = -\frac{1}{4}(x^2 - 8x + 16) + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - 4 + 4 = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$$

Für die andere Parabel ist der Ansatz einfacher, da ihr Scheitelpunkt im Ursprung liegt: $g(x) = ax^2$. Sie geht zudem durch $(6, 3)$, woraus wir folgern:

$$g(6) = 36a \stackrel{!}{=} 3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{1}{12}x^2$$

Zur Berechnung der Zwischenfläche verwenden wir die Differenzfunktion:

$$f(x) - g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{12}x^2 = \frac{-3-1}{12}x^2 + 2x = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$$

Jetzt können wir über die Differenzfunktion integrieren:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^6 \left(-\frac{1}{3}x^2 + 2x \right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{9}x^3 + x^2 \right] \Big|_0^6 = -\frac{216}{9} + 36 - 0 = -24 + 36 = \underline{\underline{12}} \end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um eine um $\frac{1}{2}$ nach unten verschobene Sinusfunktion: $h(x) = -\frac{1}{2} + \sin x$.

Wir müssen zuerst ihre Schnittstellen mit der x -Achse im Intervall $[0; \pi]$ ermitteln:

$$h(x) = -\frac{1}{2} + \sin x \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{6} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5\pi}{6}$$

Jetzt können wir die gesuchte Fläche via Integration bestimmen:

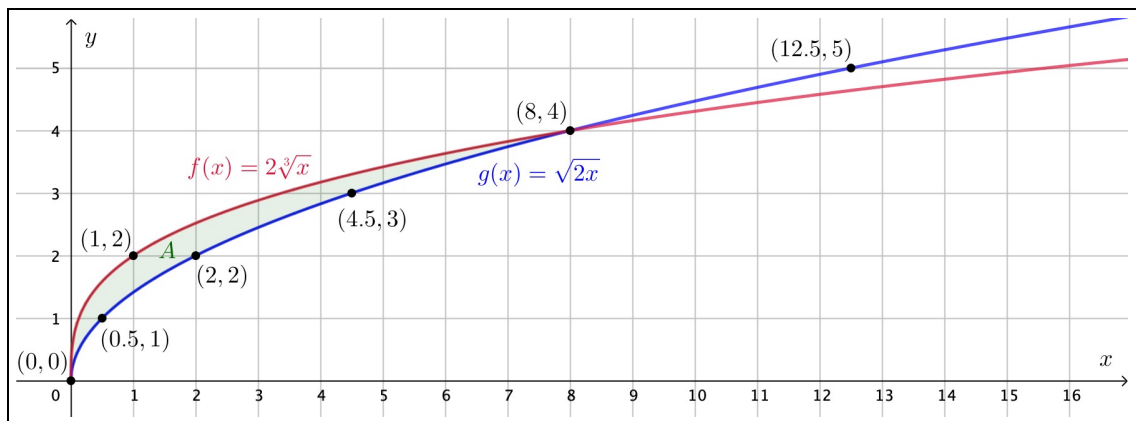
$$\begin{aligned} A &= \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(-\frac{1}{2} + \sin x \right) dx = \left[-\frac{1}{2}x - \cos x \right]_{\pi/6}^{5\pi/6} \\ &= -\frac{5\pi}{12} - \cos \frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{4\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}}} \end{aligned}$$

6. Für $f(x) = 2\sqrt[3]{x}$ finden wir rasch die Punkte $(0,0)$, $(1,2)$, $(8,4)$.

Ebenso erhalten wir für $g(x) = \sqrt{2x}$ die Punkte $(0,0)$, $(0.5,1)$, $(2,2)$, $(4.5,3)$, $(8,4)$ und $(12.5,5)$.

Wir sehen, dass sich die Graphen in $(0,0)$ und $(8,4)$ treffen. Für $0 < x < 8$ liegt $f(x)$ über $g(x)$.

Da wir wissen, wie Wurzelfunktionen grundsätzlich aussehen, fällt das Skizzieren nicht mehr schwer:



Nun integrieren wir über die Differenzfunktion und erhalten für die Zwischenfläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^8 (f(x) - g(x)) dx = \int_0^8 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2x}) dx = \int_0^8 (2x^{\frac{1}{3}} - \sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= \left[2 \cdot \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^8 = \left[\frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} - \frac{2\sqrt{2}}{3}x\sqrt{x} \right]_0^8 \\ &= \frac{3}{2} \cdot 8\sqrt[3]{8} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 8\sqrt{8} - 0 = \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot 2 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2} = 24 - \frac{64}{3} = \frac{72-64}{3} = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

7. Zunächst müssen wir die Funktionsgleichung der Tangente bestimmen. Dazu benötigen wir die y -Koordinate des Berührungspunktes P und die Steigung des G_f (und somit der Tangente) über der Stelle $x = -1$:

$$\begin{aligned} f(-1) &= \frac{3(-1)^3}{8} - \frac{3(-1)^2}{8} - \frac{9(-1)}{4} + 1 = \frac{-3-3+18+8}{8} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} = y_P \\ f'(x) &= \frac{9x^2}{8} - \frac{3x}{4} - \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = \frac{9(-1)^2}{8} - \frac{3(-1)}{4} - \frac{9}{4} = \frac{9+6-18}{8} = -\frac{3}{8} = m \\ \Rightarrow \quad t(x) &= m(x - x_P) + y_P = -\frac{3}{8}(x - (-1)) + \frac{5}{2} = -\frac{3x}{8} - \frac{3}{8} + \frac{20}{8} = \underline{\underline{-\frac{3x}{8} + \frac{17}{8}}} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen von $f(x)$ und $t(x)$ ermitteln wir die Schnittstelle, also die x -Koordinate von Q :

$$f(x) = t(x) \Rightarrow \frac{3x^3}{8} - \frac{3x^2}{8} - \frac{9x}{4} + 1 = -\frac{3x}{8} + \frac{17}{8} \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$$

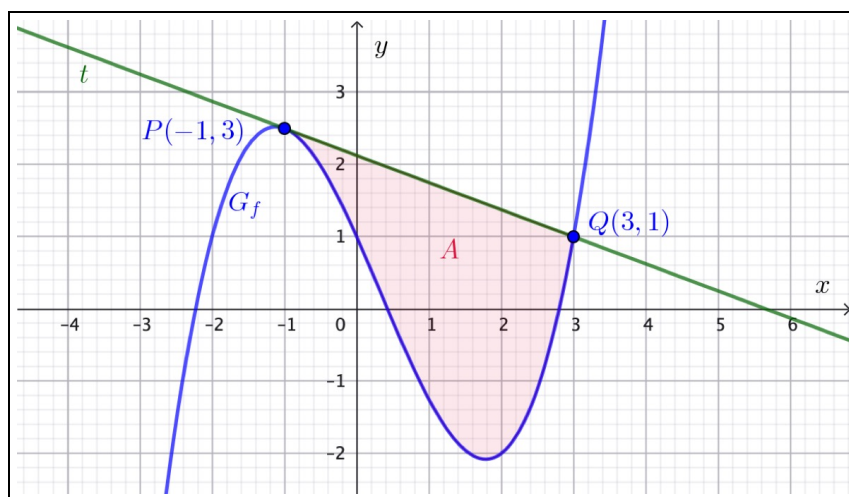
Wir machen uns klar, dass wir eine Lösung dieser kubischen Gleichung bereits kennen. Über $x = -1$ berührt die Tangente t den G_f . Da es sich um einen Berührungspunkt handelt, muss $x = -1$ sogar eine doppelte Lösung der Gleichung sein. Das bedeutet, bei der Faktorisierung der linken Seite muss sich zweimal ein Faktor $(x - (-1))$ resp. $(x + 1)$ ausklammern lassen. Führen wir also diese Faktorisierung durch:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = (x + 1)(x^2 - 2x - 3) = (x + 1)^2(x - 3) \stackrel{!}{=} 0$$

Somit muss der Schnittpunkt Q die x -Koordinate $x = 3$ aufweisen. Die Zwischenfläche muss sich demnach mit einem Integral von $x = -1$ bis $x = 3$ berechnen lassen. Bevor wir diese Rechnung ausführen, werfen wir nun aber einen Blick auf die grafische Situation. Vor dem Skizzieren stellen wir fest:

- Der Graph G_f dieser kubischen Funktion kommt links aus dem negativ Unendlichen und geht rechts ins negativ Unendliche, weil der Koeffizient des kubischen Gliedes positiv ist.
- Der G_f schneidet die y -Achse bei $y = 1$ (= konstantes Glied) mit der Steigung $-\frac{9}{4}$ (= Koeffizient des linearen Gliedes).
- Aus unseren vorherigen Berechnungen kennen wir bereits den Berührungspunkt $P(-1, 3)$. Weiter lässt sich der Schnittpunkt Q mit x -Koordinate 3 bestimmen: $t(3) = -\frac{3 \cdot 3}{8} + \frac{17}{8} = \frac{8}{8} = 1$, also $Q(3, 1)$.

Nun haben wir genug Informationen um uns die Situation im Koordinatensystem klarzumachen:



Schliesslich berechnen wir die gesuchte Zwischenfläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^3 (t(x) - f(x)) \, dx = \int_{-1}^3 \left(-\frac{3x}{8} + \frac{17}{8} - \left(\frac{3x^3}{8} - \frac{3x^2}{8} - \frac{9x}{4} + 1 \right) \right) \, dx \\ &= \int_{-1}^3 \left(-\frac{3x^3}{8} + \frac{3x^2}{8} + \frac{15x}{8} + \frac{9}{8} \right) \, dx = \frac{3}{8} \int_{-1}^3 (-x^3 + x^2 + 5x + 3) \, dx = \frac{3}{8} \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + 3x \right] \Big|_{-1}^3 \\ &= \frac{3}{8} \left(-\frac{3^4}{4} + \frac{3^3}{3} + \frac{5 \cdot 3^2}{2} + 3 \cdot 3 - \left(-\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3} + \frac{5(-1)^2}{2} + 3(-1) \right) \right) \\ &= \frac{3}{8} \left(-\frac{81}{4} + 9 + \frac{45}{2} + 9 - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 3 \right) \right) = \frac{3}{8} \left(-\frac{81}{4} + 18 + \frac{45}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{3}{8} \left(-\frac{80}{4} + 18 + \frac{40}{2} + \frac{1}{3} + 3 \right) = \frac{3}{8} \left(21 + \frac{1}{3} \right) = \frac{3}{8} \cdot \frac{64}{3} = \underline{8} \end{aligned}$$

8. (a) Die erste negative Nullstelle liegt bei $-\frac{\pi}{2}$, die erste positive bei $\frac{\pi}{2}$. Somit folgt für die Fläche in Abhängigkeit des Parameters m :

$$A = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} m \cos x \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} m \cos x \, dx = 2m \sin x \Big|_0^{\pi/2} = 2m \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 2m(1 - 0) = 2m$$

Soll diese Fläche den Wert 16 aufweisen, so muss $m = 8$ sein.

- (b) Wir integrieren drauf los:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^c \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{1}{\ln \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \Big|_0^c = \frac{1}{\ln 2^{-1}} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^c - 1\right) = -\frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^c - 1\right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2 \ln 2} \\ \Rightarrow \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^c &= \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^c \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c = 1}} \end{aligned}$$

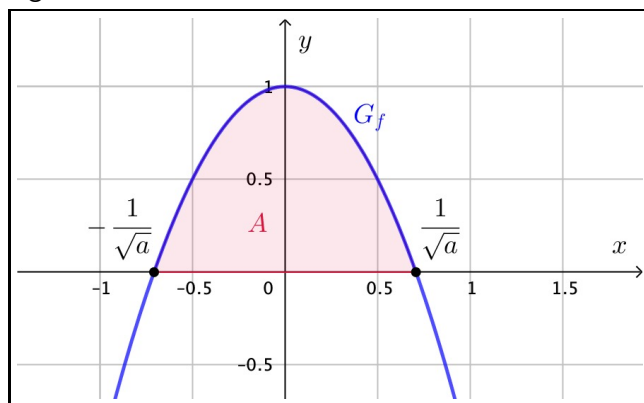
Die vielen $\frac{1}{2}$ gestalten die Rechnung einigermaßen mühsam und unübersichtlich. Es empfiehlt sich daher von Anfang an die Funktion $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ in der Form $f(x) = 2^{-x}$ zu notieren. Damit sieht die Rechnung folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^c \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \int_0^c 2^{-x} dx = -\frac{1}{\ln 2} \cdot 2^{-x} \Big|_0^c = -\frac{1}{\ln 2} \cdot (2^{-c} - 1) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2 \ln 2} \\ \Leftrightarrow \quad 1 - 2^{-c} &= \frac{1}{2} = 2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{-c} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{c = 1}} \end{aligned}$$

- (c) i. Es ist klar, dass die Parabel symmetrisch zur y -Achse liegt (kein lineares Glied in $f(x)$). Der Schnittpunkt mit der y -Achse liegt auf der Höhe 1. Durch Faktorisieren ergeben sich die Nullstellen:

$$f(x) = 1 - 2x^2 = (1 + \sqrt{2}x)(1 - \sqrt{2}x) \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Die Parabel sieht wie folgt aus:



- ii. Die allgemeinen Nullstellen lauten $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{a}}$ und $x_2 = \frac{1}{\sqrt{a}}$. Nun können wir integrieren, wobei wir die Achsensymmetrie des Funktionsgraphen ausnutzen:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1/\sqrt{a}}^{1/\sqrt{a}} (1 - ax^2) dx = 2 \cdot \int_0^{1/\sqrt{a}} (1 - ax^2) dx = 2 \cdot \left[x - \frac{a}{3} x^3 \right] \Big|_0^{1/\sqrt{a}} \\ &= 2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{a\sqrt{a}} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{\sqrt{a}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\sqrt{a}} \stackrel{!}{=} 1 \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} &= \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \frac{16}{9}}} \end{aligned}$$

9. Für die drei Integrale berechnen wir:

$$(a) \int_{-3}^{-1} 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \cdot 2^x \Big|_{-3}^{-1} = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{4-1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8 \ln 2}}}$$

$$(b) \int_{-3}^3 (-x^2 - x + 9) dx = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \cdot \int_0^3 (-x^2 + 9) dx \\ = 2 \cdot \left[-\frac{1}{3} x^3 + 9x \right] \Big|_0^3 = 2 \cdot (-9 + 27) = 2 \cdot 18 = \underline{\underline{36}}$$

$$(c) \int_1^{16} \sqrt{x} dx = \int_1^{16} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{16} = \frac{2}{3} \cdot x \sqrt{x} \Big|_1^{16} = \frac{2}{3} \cdot (64 - 1) = \frac{2}{3} \cdot 63 = \underline{\underline{42}}$$

10. (a) Für die Funktion setzen wir an: $f(x) = ax^2 - 1$ (Scheitelpunkt- oder Normalform).

Der G_f verläuft durch $(2, 1)$, sodass für a resp. $f(x)$ folgt:

$$f(2) = 4a - 1 \stackrel{!}{=} 1 \Leftrightarrow 4a = 2 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 1}}$$

Für die Flächenbestimmung benötigen wir die Integrationsgrenzen. Diese werden durch die Nullstellen von $f(x)$ festgelegt:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{2}$$

Somit kennen wir die Grenzen des Integrals. Wir nutzen die Achsensymmetrie aus und nehmen schliesslich den Betrag, denn die Fläche soll positiv sein, obwohl sie unterhalb der x -Achse liegt:

$$A = \left| \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} x^2 - 1 \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2} x^2 - 1 \right) dx \right| = 2 \cdot \left| \left[\frac{1}{6} x^3 - x \right] \Big|_0^{\sqrt{2}} \right| \\ = 2 \cdot \left| \frac{1}{6} \cdot 2\sqrt{2} - \sqrt{2} \right| = 2\sqrt{2} \cdot \left| \frac{1}{3} - 1 \right| = 2\sqrt{2} \cdot \left| -\frac{2}{3} \right| = 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{3}}}$$

(b) Die beiden Funktionen sind gegeben durch:

$$f(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g(x) = -\frac{2}{\pi} x + 1$$

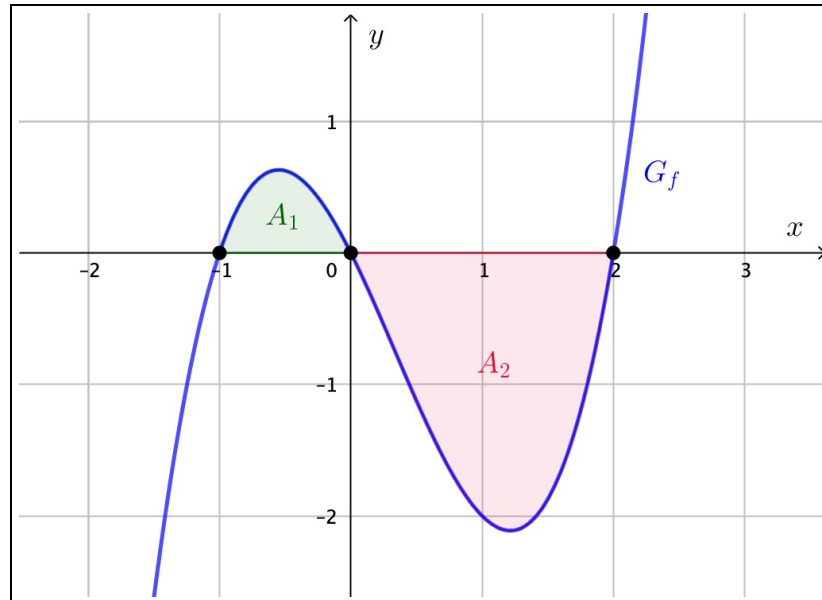
Die beiden Teilflächen sind aus Symmetriegründen beide gleich gross. Somit integrieren wir von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ über die Funktionsdifferenz $f(x) - g(x)$ und verdoppeln das Ergebnis:

$$A = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\cos x - \left(-\frac{2}{\pi} x + 1 \right) \right) dx = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \left(\cos x + \frac{2}{\pi} x - 1 \right) dx \\ = 2 \cdot \left[\sin x + \frac{1}{\pi} x^2 - x \right] \Big|_0^{\pi/2} = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot \left(1 + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \underline{\underline{2 - \frac{\pi}{2}}}$$

11. Zunächst werden die Nullstellen der Funktion benötigt. Wir faktorisieren:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2) \Rightarrow \text{NS bei: } \underline{x = -1, 0, 2}$$

Da es sich um eine kubische Funktion mit positivem Koeffizient bei der höchsten Potenz handelt, kommt der Graph links aus dem negativ Unendlichen und wächst rechts ins positiv Unendliche an. Dazwischen durchquert er dreimal die x -Achse, wie das eine kubische Funktion eben kann:



Nun können die beiden Flächen mittels Integralen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) \, dx = \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{3+4-12}{12} = -\frac{-5}{12} = \underline{\underline{\frac{5}{12}}} \\ A_2 &= \left| \int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x) \, dx \right| = \left| \left[\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^2 \right| \\ &= \left| \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - 4 - 0 \right| = \left| 4 - \frac{8}{3} - 4 \right| = \left| -\frac{8}{3} \right| = \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{12}}} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ein Flächenverhältnis von:

$$A_2 : A_1 = \frac{32}{12} : \frac{5}{12} = \frac{32}{12} \cdot \frac{12}{5} = \frac{32}{5} = \underline{\underline{32 : 5}} = \underline{\underline{6.4 : 1}}$$

12. Für die Fläche berechnen wir in Abhängigkeit des Parameters c :

$$A = \int_1^c \frac{c}{x^2} \, dx = c \cdot \int_1^c x^{-2} \, dx = c \cdot \left[-x^{-1} \right]_1^c = -\frac{c}{x} \Big|_1^c = -1 + c$$

Diese Fläche soll gleich 10 sein, woraus wir folgern:

$$A = -1 + c \stackrel{!}{=} 10 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = 11}}$$